

QUADERNO DEGLI APPUNTI

8 marzo 2021

BIOMECCANICA E SIMULAZIONE DEI DISPOSITIVI BIOMEDICI

Biomeccanica: studio della meccanica applicata alla biologia.

Simulazione numerica: implementazione di modelli matematici → scrivere equazioni che descrivono un sistema fisico che devono essere risolte in maniera:

- analitica,
- numerica (per problemi più complessi).

Dispositivi medici: qualsiasi dispositivo usato per scopi medici. Interagiscono con pazienti quindi forniscono diagnosi, trattamenti, cure.

Ingegneria: settore delle scienze e della tecnica che usano strumenti matematici per analizzare problemi e progettare soluzioni.

Si parte da un problema scientifico-tecnologico che deve essere trasformato in equazioni (modello matematico) per analizzare il problema e trovare soluzioni.

Meccanica: settore dell'ingegneria che riguarda il moto e le deformazioni di corpi sui quali agiscono delle forze.

TIPI DI MATERIALI

Un aspetto fondamentale è la natura dell'oggetto.

Un materiale è un qualcosa fatto di materia, costituito da una o più sostanze. Si hanno materiali:

- tradizionali dell'ingegneria: polimeri, metalli e leghe,
- innovativi dell'ingegneria: adattivo, intelligenti e funzionali,
- biologici: che si adattano alle condizioni di carico, alle condizioni nelle quali vivono.

MATERIALI TRADIZIONALI DELL'INGEGNERIA

Type	Chemical bond type	microstructure	advantages	Drawbacks
Metals and alloys	metallic	Crystal grains	• Resistant • Ductile • Conductive	• Fatigue • Fracture
Polymers	covalent	Molecular chains	• Low cost • Light • Corrosion	• Low resistance • Low rigidity • Viscous
Ceramics/Glass	Ionic/covalent	Crystal grains, amorphous	• Resistant, • Hard • High temp. • Corrosion	• Fragile
Composites	Several types	Fiber matrix	• Resistant, rigid	• High cost • Delamination

Noi studieremo modelli di meccanica, quindi di un corpo che si muove, soggetto a forze. Il modello meccanico è formato da una serie di equazioni e deve essere usato per risolvere un certo problema. Non esiste un unico modello per un determinato problema.

Le equazioni devono rappresentare tre differenti aspetti:

- cinematica → deformazione,
- equilibrio → bilancio delle forze,
- legami costitutivi → come si comporta un materiale.

Gli argomenti che affronteremo sono:

Corpo rigido (2D – 3D)	Cinematica Equilibrio statico e dinamico
Corpo deformabile (3D)	Cinematica Equilibrio statico e dinamico Equazioni costitutive
Trave rigida (2D – 3D)	Cinematica Equilibrio statico e dinamico
Trave deformabile (1D – 2D)	Cinematica Equilibrio Equazioni costitutive

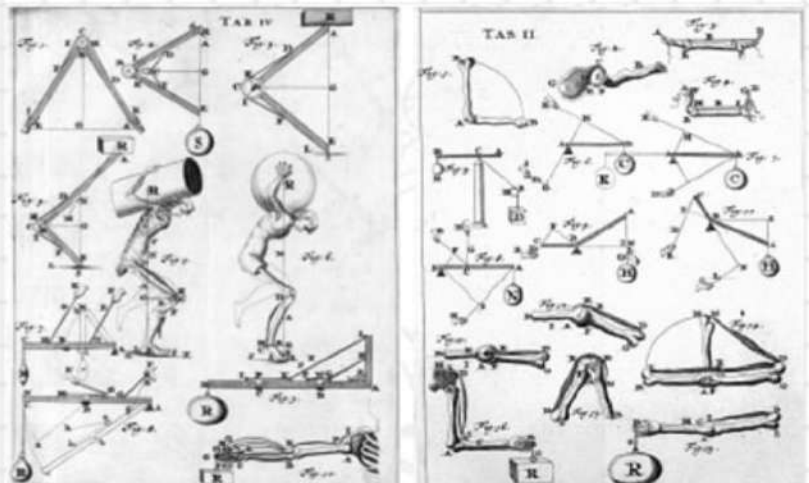
BIOMECCANICA

La biomeccanica è:

1. la meccanica applicata alla biologia,
2. lo studio della struttura, funzione e moto degli aspetti meccanici di un sistema biologico in ogni livello dell'intero organismo dagli organi, alle cellule fino agli organismi cellulari, usando i metodi della meccanica,
3. studio dei dispositivi che interagiscono con i sistemi biologici.

È una scienza moderna che affonda le radici nell'antichità con:

- Leonardo Da Vinci,
- Galileo Galilei,
- Giovanni Alfonso Borelli, il quale schematizzò problemi complicati attraverso l'utilizzo di travi.



Gli obiettivi sono:

- studiare strutture/funzioni dei sistemi biologici, della cellula, del corpo umano,
- studiare le interazioni dei dispositivi con i sistemi biologici, ad esempio le protesi.

APPLICAZIONI

Alcune applicazioni della biomeccanica sono:

- del sistema cardiovascolare, respiratorio e muscoloscheletrico → meccanica del flusso del sangue e dell'aria, meccanica dei tessuti molli,
- dentale → design e analisi dei tessuti dentali e delle protesi, meccanica della masticazione;
- ortopedica → meccanica delle fratture e degli impianti,
- riabilitativa → analisi dell'andatura,
- sportiva → meccanica della performance sportiva,
- cellulare → analisi biomeccanica delle cellule, delle membrane e delle strutture subcellulari,
- tissutale → fattori biomeccanici nella medicina ingegnerizzata per la sostituzione/rigenerazione dei tessuti,
- molecolare → meccanica delle biomolecole.

APPLICAZIONE - STENOSI

Per stenosi si intende restringimento anomalo di un organo tubolare. Si hanno varie tipologie:

- Stenosi carotidea: si intende un restringimento della carotide (vaso che porta il sangue al cervello) dovuta alla deposizione di materiale.
- Stenosi aortica: si cerca di procedere nella maniera meno invasiva possibile, attraverso un accesso periferico → si fa entrare un filo guida che porta fino alla valvola aortica (ultima valvola del cuore attraverso la quale il sangue passa dal cuore al sistema vascolare), su questo filo c'è un palloncino che viene gonfiato e aggiusta la stenosi.
- Valvole stenotiche: si intende valvole che non si aprono bene.
- Stenosi della trachea: in questo caso non si riesce ad ingerire materiale o a respirare bene.

Si cerca di intervenire restituendo al vaso la giusta dimensione.

ANGIOPLASTICA

Fasi:

1. inserimento del catetere con palloncino,
2. gonfiaggio del palloncino,
3. sgonfiaggio del palloncino e rimozione del catetere.



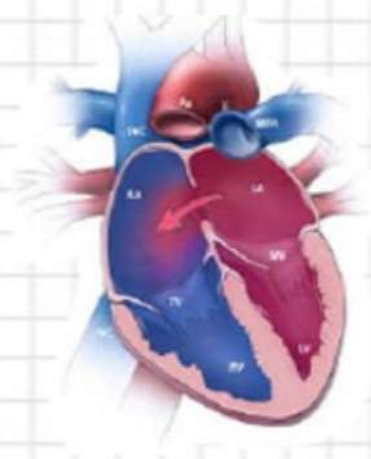
STENTING

Fasi:

1. inserimento del catetere con palloncino sul quale c'è una rete metallica,
2. gonfiaggio del palloncino,
3. sgonfiaggio del palloncino e rimozione del catetere, rimane però la rete metallica (stent).



APPLICAZIONE - DIFETTO DEI SENI ATRIALI



Gli atri dovrebbero essere separati.

Si può procedere con un intervento poco invasivo (accesso periferico): si rilasciano degli ombrellini che chiudono il buco e correggono la patologia.

Questo è un impianto di una protesi fatto con materiale innovativi, detti a memoria di forma.

LEGHE A MEMORIA DI FORMA

Tali materiali sono metalli con capacità intrinseca di ricordare una forma iniziale anche dopo elevate deformazioni. Si hanno due effetti:

- superelastico: materiale che è possibile tirare e quando viene rilasciato recupera completamente la sua forma iniziale,
- a memoria di forma: si recupera la forma iniziale se si immerge in un "bagno caldo".

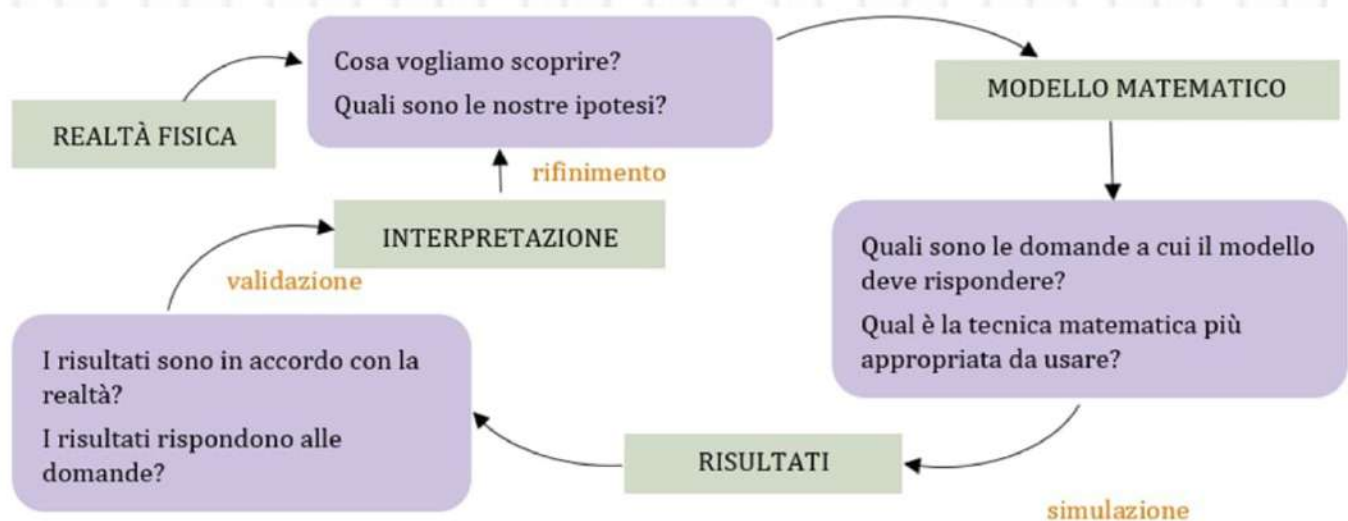
MODELLIZZAZIONE MATEMATICA DELLA REALTÀ

Un modello è un'ipotesi e un'assunzione sulla realtà considerata basato sullo scopo dello studio. Diversi modelli possono essere utilizzati per descrivere lo stesso fenomeno.

Le componenti essenziali della meccanica sono:

- cinematica → studio del cambio di configurazione,
- equilibrio → studio delle condizioni di equilibrio statico e dinamico,
- legami costitutivi → descrizione del comportamento dei materiali.

L'obiettivo dell'ingegnere è guardare un fenomeno ed entrare nel seguente loop:



I passaggi sono:

- studiare la realtà,
- costruire un modello matematico,

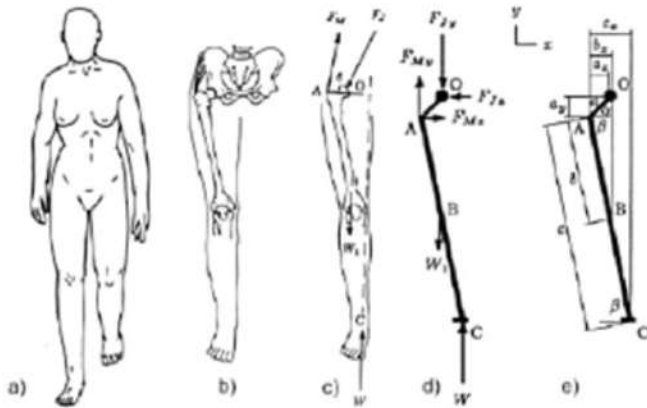
- risolvere il modello con una simulazione numerica,
- ottenere risultati,
- chiederci se i risultati hanno risolto il problema.

L'obiettivo è sviluppare un primo modello matematico, risolvere il problema e capire se è sufficiente adeguato a darmi le risposte necessarie.

Si possono implementare diversi modelli:

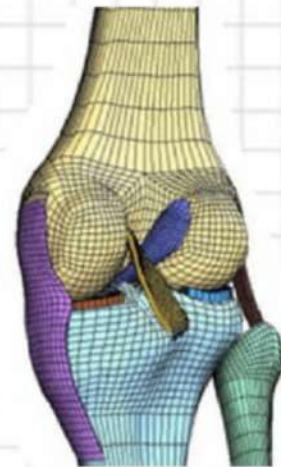
Meno complessi

- meno accurati,
- più facili da risolvere.



Più complessi

- più accurati,
- più difficili da risolvere.



L'ingegnere parte dal modello più facile, lo studia e lo migliora, cerca di entrare nel loop e di sviluppare più modelli matematici.

STAMPA 3D

Si parte da immagini mediche, si evidenziano organi di interesse e si riproducono. La tecnica è additiva: si creano oggetti depositando strato dopo strato.

3D4MED: Laboratorio in collaborazione con S. Matteo; si parte segmentando l'immagine (CT) e si stampano gli organi di interesse. Ciò è utile per:

- pianificazione chirurgica,
- training,
- spiegazioni al paziente.

È possibile stampare anche materiale biocompatibile e usare cellule del paziente; tale tecnica è detta bioprinting.

OGGETTO DI INTERESSE

Il corpo è un porzione di materia che, in un dato istante di tempo, occupa una certa regione di spazio. Se la regione occupata dal corpo è trascurabile (ed è riducibile a un punto) esso è chiamato particella. Tutti i corpi non riducibili a singola particella sono detti corpi finiti. Un corpo finito che occupa una certa regione di materia è detto corpo continuo.

Qualsiasi corpo soggetto a forze di nostro interesse è 3D. Il primo passaggio nella costruzione di un modello di meccanica è capire come identificare un corpo 3D con qualcosa di astratto.

PUNTO MATERIALE

Il modello più semplice è il punto materiale: oggetto che ha massa ma non volume.

SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI

Coordinate lagrangiane: numero di parametri indipendenti che definiscono la generica configurazione del mio sistema. Esse sono anche dette gradi di libertà (gdl).

Si deve capire la posizione del punto nello spazio → si introduce il sistema di riferimento (SR).

Un punto materiale che si muove nello spazio 3D è caratterizzato da 3 gdl.

ES: ho un sistema con 3 punti materiali che si muovono liberi nello spazio. Di quanti gdl è dotato il sistema?

9

ES: ho un sistema con 1 punto materiale che si muove su un piano. Di quanti gdl è dotato il sistema?

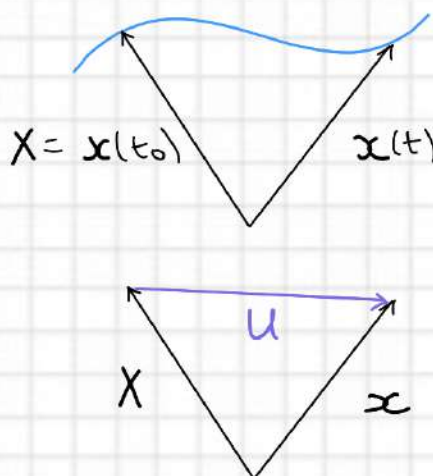
2

CINEMATICA

Studio del cambio delle configurazioni del sistema. Si può identificare la posizione del punto con un vettore. Si hanno 3 componenti → 3 gdl.

Posizione	$\mathbf{x}(t)$
Spostamento	$\mathbf{x}(t) - \mathbf{X}(t_0)$
Velocità	$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$
Accelerazione	$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2}$

N.B. posizione iniziale: scritto in maiuscolo,
posizione finale: scritto in minuscolo.



FORZE

Per poi parlare di equilibrio devo prima sapere che forze agiscono sul punto.

VETTORE

NOTAZIONE INTRINSECA

Quando un vettore è scritto con una lettera (in grassetto o con un apice).

Tale notazione non dipende dal SR.

$\mathbf{F}$ o $\vec{F}$

NOTAZIONE INDICIALE

Quando si scrive la generica componente del vettore.

Tale notazione non dipende dal SR.

F_i

NOTAZIONE INGEGNERISTICA

Quando vengono esplicitate le componenti del vettore.

Tale notazione dipende dal SR.

$\{F_1, F_2, F_3\}$

MOTO DEL PUNTO MATERIALE

Le forze sono interazioni tra corpi e causano il movimento del corpo.

Tutti i corpi vicini alla terra sono soggetti alla forza gravitazionale terrestre e, se non sono soggetti ad altre forze, cadono verso il centro della terra con la stessa accelerazione g . [Galileo Galilei]

Sulle basi delle leggi di Keplero riguardo il moto dei pianeti, Newton sviluppò il suo più famoso lavoro "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", nel quale descrive la legge di gravità e le tre leggi di Newton, creando le basi della meccanica.

1LN Ogni punto in uno stato di moto uniforme tende a mantenere il proprio stato a meno che non intervenga una forza esterna.

2LN Se al punto è applicata una forza, esso subirà un'accelerazione proporzionale a F attraverso la massa:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

3LN Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria.

Le tre leggi di Newton sono assiomi → possiamo testarne l'effettività attraverso metodi sperimentali.

EQUILIBRIO

La seconda legge può essere interpretata come legge di equilibrio → si ha una uguaglianza tra F e la forza inerziale $m\mathbf{a}$.

Si può anche vedere F come la risultante delle forze applicate al punto. Nel caso in cui l'accelerazione del punto materiale sia nulla, lo è anche la risultante delle forze. Si parla quindi di statica.

Si ha:

Statica: $a = 0$ $R = 0$

Dinamica: $a \neq 0$ $R = ma$

PRINCIPIO DEI VALORI VIRTUALI

Un altro modo per esprimere l'equilibrio di un corpo è l'utilizzo del principio dei lavori virtuali $\rightarrow$ ho un sistema soggetto a forze, devo capire se è in equilibrio $\rightarrow$ considero degli spostamenti virtuali e ne calcolo il lavoro.

Supponiamo di avere un punto materiale sul quale agiscono tre forze, calcolo il lavoro virtuale:

$$dW = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{u} \Rightarrow dW = (F_1 d\mathbf{u}) + (F_2 d\mathbf{u}) + (F_3 d\mathbf{u})$$

Il sistema di forze è in equilibrio se la risultante delle forze è nulla.

Vogliamo dimostrare che un sistema di forze è nullo se il lavoro virtuale dW è nullo per ogni possibile spostamento virtuale $d\mathbf{u}$ e viceversa:

$$dW = \sum_i (\mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{u}) = \sum_i (\mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{u}) = 0 \quad d\mathbf{u} \neq 0 \quad \text{equilibrio} \Rightarrow dW = 0 \quad \forall d\mathbf{u}$$

$$dW = \sum_i (\mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{u}) = \left(\sum_i \mathbf{F}_i \right) \cdot d\mathbf{u} = 0 \quad \forall d\mathbf{u} \quad dW = 0 \quad \forall d\mathbf{u} \Rightarrow \text{equilibrio}$$

$$\Rightarrow \sum_i \mathbf{F}_i = 0$$

N.B. Nel punto materiale non ha senso di parlare di lavoro virtuale interno perché non esiste il concetto di deformazione ma in generale:

$$dW = dW_{\text{ext}} - dW_{\text{int}}$$

CORPO RIGIDO

Il secondo modello di meccanica è il corpo rigido. Per corpo si intende qualcosa che occupa una regione dello spazio, qualcosa che ha area/volume.

DEF1 Un corpo è rigido se la distanza tra due punti si mantiene costante.

DEF2 Un corpo è rigido se non si deforma sotto l'influenza di forze.

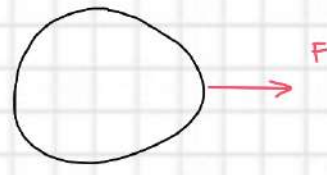
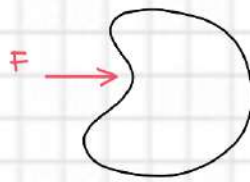
DEF3 Un corpo è rigido se l'effetto delle forze sul corpo non dipende dal punto di applicazione ma sulla retta di azione.

N.B. In natura non esiste alcun corpo rigido così come non esiste alcun punto materiale.

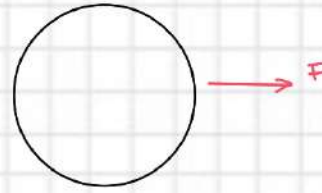
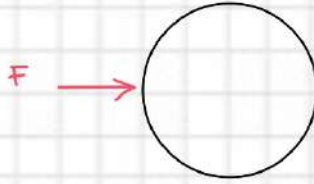
PRINCIPIO DI TRASMISSIBILITÀ

Il corpo rigido può essere anche definito attraverso il principio di trasmissibilità: nel corpo rigido agiscono forze in base alla loro retta di azione, non al loro punto di applicazione.

Corpo deformabile



Corpo rigido



CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO

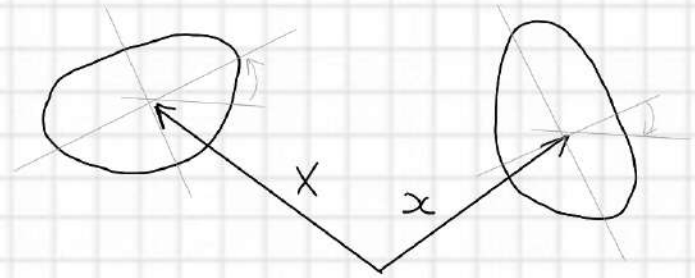
Si vuole capire quanti gradi di libertà ha un corpo rigido.

I corpi rigidi possono essere:

- 2D: qualcosa che vive sul piano,
- 3D: qualcosa che vive nello spazio.

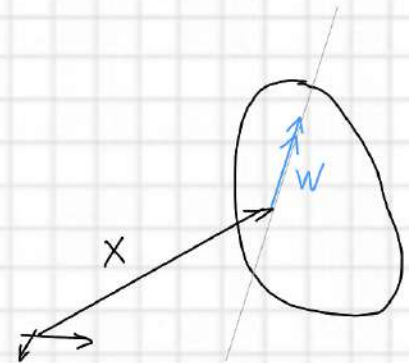
In 2D di quanti gdl è dotato il corpo?

Il corpo è caratterizzato da due spostamenti traslazionali e una rotazione $\rightarrow$ si hanno quindi 3 gdl che sono caratterizzati da un vettore spostamento e un angolo scalare.



In 3D di quanti gdl è dotato il corpo?

Il corpo è caratterizzato da un vettore posizione e un vettore rotazione $\rightarrow$ si hanno quindi 6 gdl.



CAMPO DEGLI SPOSTAMENTI

Nel modello di punto materiale lo spostamento era un vettore; nel modello di corpo rigido è un campo vettoriale → in ogni punto del corpo posso parlare di vettore. Può essere espresso come:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(P) = \mathbf{u}(P_0) - \mathbf{w} \times (P - P_0) \\ \mathbf{u}(P) = \mathbf{u}(P_0) + \mathbf{W} \times (P - P_0) \end{cases}$$

Prima equazione: $\mathbf{w}$ è un vettore:

- il primo termine rappresenta la traslazione,
- il secondo è una rotazione che dipende dalla distanza dal punto di rotazione.

Il corpo ha una rotazione attorno al punto P_0 .

Seconda equazione: $\mathbf{W}$ è una matrice 3x3 emisimmetrica ($\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$).

Tutto questo vale se vale l'ipotesi di piccoli spostamenti!

IPOTESI DI PICCOLI SPOSTAMENTI

Non si parla di piccoli spostamenti in assoluto ma di piccoli spostamenti in relazione alla dimensione caratteristica del problema.

Il campo degli spostamenti ($\mathbf{u}$) riscalato a una dimensione caratteristica del problema (L) deve essere molto più piccola di 1:

$$\frac{\|\mathbf{u}\|}{L} \ll 1$$

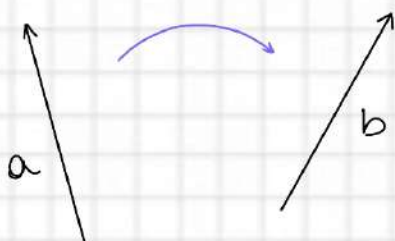
TENSORE DEL SECONDO ORDINE

Se prendo due punti arbitrari del corpo P e P_0 sufficientemente vicini allora si può fare lo sviluppo in serie della funzione $\mathbf{u}(P)$ trascurando i termini di ordine superiore.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(P) &= \mathbf{u}(P_0) + \left. \frac{d\mathbf{u}}{dx} \right|_{P_0} dx \\ &= \mathbf{u}(P_0) + \left. \frac{d\mathbf{u}}{dx} \right|_{P_0} (P - P_0) \\ &= \mathbf{u}(P_0) + \mathbf{H} (P - P_0) \end{aligned}$$

$\mathbf{H}$: matrice 3x3

$\mathbf{W}$ e $\mathbf{H}$ sono tensori del II ordine.



Il tensore è una entità dotata significato fisico intrinseco, indipendente dal SR e dall'osservatore.

Il tensore del II ordine è un'operazione lineare che prende un vettore e lo trasforma in un vettore in modo lineare.

Il tensore può essere descritto con tre notazioni:

INTRINSECA

H

INDICIALE

$H_{i,j}$

INGEGNERISTICA

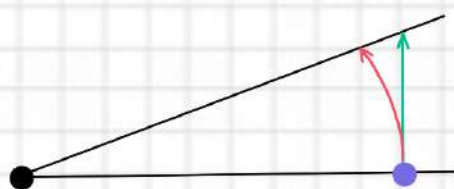
$$H = \begin{vmatrix} H_{1,1} & H_{1,2} & H_{1,3} \\ H_{2,1} & H_{2,2} & H_{2,3} \\ H_{3,1} & H_{3,2} & H_{3,3} \end{vmatrix}$$



DA QUESTO MOMENTO IN POI STUDIEREMO CORPI RIGIDI 2D CHE SI MUOVONO NEL PIANO E SI FARÀ L'IPOTESI DI PICCOLI SPOSTAMENTI.

Un corpo 2D ha 3 gdl:

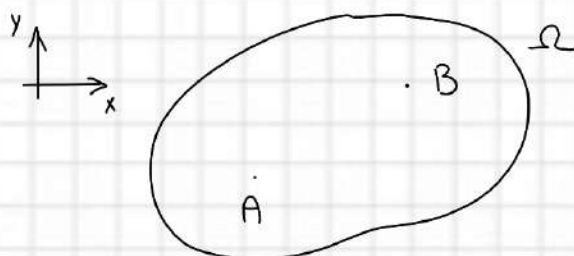
- 2 traslazioni,
- 1 rotazione.



Supponiamo che il corpo rigido ruoti attorno a un punto. Facendo l'ipotesi di piccoli spostamenti si può approssimare la traiettoria circolare con la tangente nel punto. Quindi il corpo rigido si muoverà lungo la retta perpendicolare alla retta congiungente i due punti.

Quindi, per convenzione, quando un corpo ruota attorno un punto si considera una traiettoria rettilinea.

ES: supponiamo di avere un corpo rigido Ω libero di muoversi. Qual è una scelta ammissibile di coordinate lagrangiane?



CONVENZIONE

u : spostamento orizzontale

v : spostamento verticale

ϕ : rotazione

Se consideriamo un punto A si ha: u_A, v_A, ϕ_A

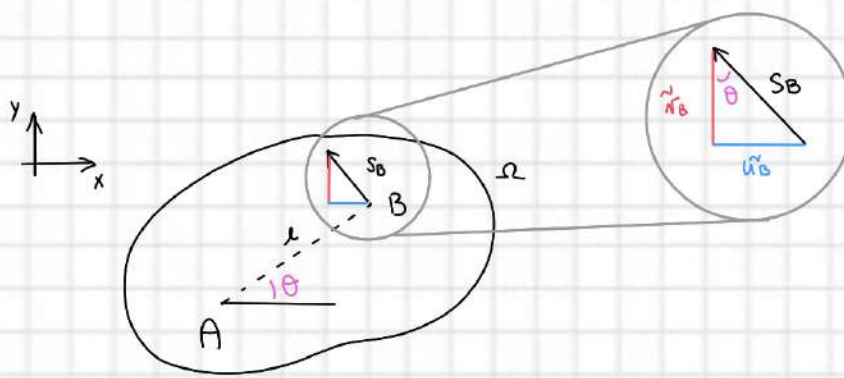
Se consideriamo un punto B si ha: u_B, v_B, ϕ_B

Sono anche ammissibili: u_A, v_A, v_B

Non sono invece ammissibili: u_A, ϕ_A, ϕ_B

Le ultime non sono ammissibili perché non sono tre parametri indipendenti e quindi non si potrebbe scrivere tutto il campo degli spostamenti.

Consideriamo le coordinate u_A, v_A, ϕ_A . Per dimostrare che questa è una scelta corretta, prendendo un generico punto B, devo essere in grado di esprimere lo spostamento del punto B in funzione di u_A, v_A, ϕ_A



$$\begin{cases} u_B = u_A + \text{termine che dipende dalla rotazione} \\ v_B = v_A + \text{termine che dipende dalla rotazione} \\ \phi_B = \phi_A \end{cases}$$

Si vuole capire cosa sono i due termini che dipendono dalla rotazione. Consideriamo:

$$s_B = \phi_A \cdot l$$

Chiamiamo la componente orizzontale $\tilde{u}_B$ e la componente verticale $\tilde{v}_B$

Si ha che:

$$\begin{cases} \tilde{u}_B = s_B \sin \theta \\ \tilde{v}_B = s_B \cos \theta \end{cases}$$

Quindi alla fine si ha:

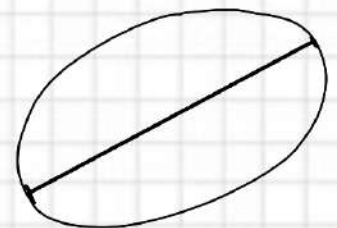
$$\begin{cases} u_B = u_A + \phi_A \cdot l \sin \theta \\ v_B = v_A + \phi_A \cdot l \cos \theta \\ \phi_B = \phi_A \end{cases}$$

N.B. siamo riusciti a esprimere lo spostamento del punto B in funzione di u_A , v_A , ϕ_A .

TRAVE

Dato che in un corpo rigido non conta il punto di applicazione e che ci interessa solamente come si sposta si può disegnare il corpo rigido con un segmento chiamato trave.

Una trave è un corpo che ha due dimensioni trascurabili rispetto alla terza.



VINCOLO CINEMATICO ASSOLUTO

Si intende un qualcosa che limita lo spostamento di un corpo, in particolare quello assoluto.

Si parla di:

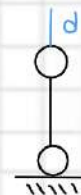
- simbolo, rappresentazione grafica,
- equazione,
- ordine (S): numero di gdl che il vincolo riesce ad eliminare.

Esso può essere:

- semplice ($S = 1$), se elimina 1 gdl,
- doppio ($S = 2$), se elimina 2 gdl,
- triplo ($S = 3$), se elimina 3 gdl.

PENDOLO: impedisce lo spostamento nella direzione dell'asse del pendolo.

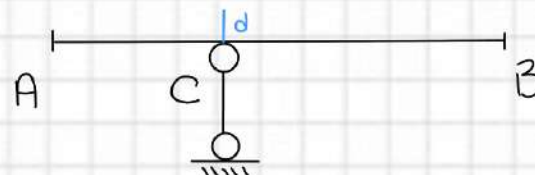
Vincolo semplice $\Rightarrow S^d = 0$



ES: si ha un corpo rigido AB e si prende una sezione C al suo interno. Si vuole bloccare lo spostamento verticale di C.

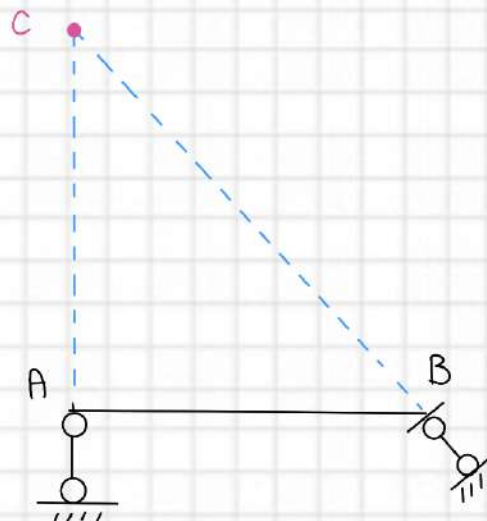
Si ha:

$$S^d = 0 \Rightarrow \sqrt{c} = 0$$



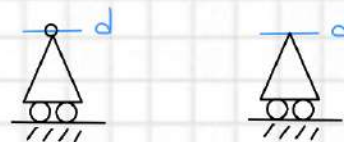
Per capire qual è una scelta ammissibile di coordinate lagrangiane, un modo efficace per procedere è disegnare la generica configurazione spostata.

OSS: se due pendoli che hanno gli assi che si incrociano, il punto nel quale si incrociano è detto centro di rotazione; tutto il sistema ruota attorno a tale punto.



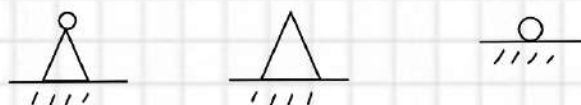
CARRELLO: impedisce lo spostamento nella direzione ortogonale all'asse di scorrimento.

Vincolo semplice $\Rightarrow S^{\perp d} = 0$



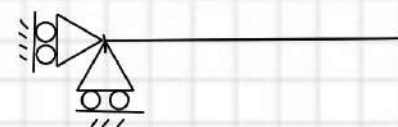
CERNIERA: impedisce gli spostamenti.

Vincolo doppio $\Rightarrow S = 0$



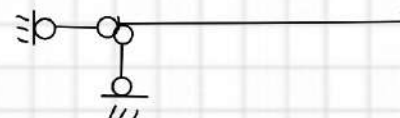
Le seguenti strutture sono equivalenti al vincolo cerniera.

- il carrello ad asse verticale impedisce la traslazione verticale,
- il carrello ad asse orizzontale impedisce la traslazione orizzontale.



Quindi sono vincolate le traslazioni.

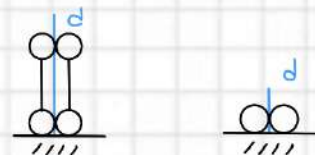
- il pendolo ad asse verticale impedisce la traslazione verticale,
- il pendolo ad asse orizzontale impedisce la traslazione orizzontale.



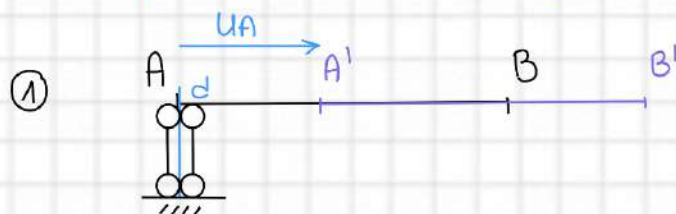
Quindi sono vincolate le traslazioni.

PATTINO (O DOPPIO PENDOLO): impedisce uno spostamento e la rotazione.

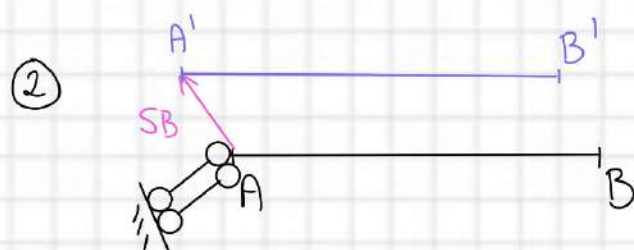
Vincolo doppio $\Rightarrow \begin{cases} S^d = 0 \\ \phi = 0 \end{cases}$



ES: vediamo i possibili spostamenti delle seguenti configurazioni.



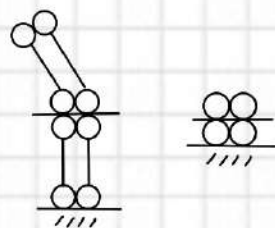
$$\begin{cases} N_A = 0 \\ \phi_A = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} S_A^d = 0 \\ \phi_A = 0 \end{cases}$$

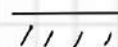
DOPPIO PATTINO (O DOPPIO-DOPPIO PENDOLO): impedisce la rotazione.

Vincolo semplice $\Rightarrow \phi = 0$



INCASTRO: impedisce completamente lo spostamento e la rotazione.

Vincolo triplo $\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{S} = \mathbf{0} \\ \phi = 0 \end{cases}$



VINCOLO RELATIVO

Supponiamo di avere due corpi rigidi nel piano. La struttura è dotata di 6 gdl.

Un vincolo relativo è un qualcosa che limita lo spostamento relativo tra due punti del sistema. Esso può essere:

- semplice ($S = 1$), se elimina 1 gdl,
- doppio ($S = 2$), se elimina 2 gdl,
- triplo ($S = 3$), se elimina 3 gdl.

PENDOLO INTERNO: blocca degli spostamenti relativi lungo una direzione.

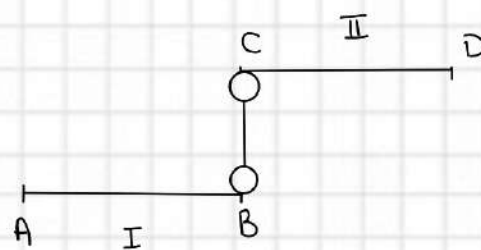
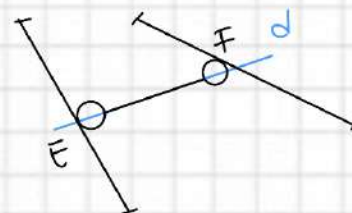
Vincolo semplice $\Rightarrow \Delta S_{EF}^d = 0$

La struttura è dotata di 5 gdl.

ES: quanti gdl ha la seguente struttura?

Prendendo come gdl u_A, v_A, ϕ_A

Se conosciamo questi conosciamo anche lo spostamento verticale di B quindi anche di C; mancano quindi u_C, ϕ_C
 $\Rightarrow$ la struttura ha 5 gdl.

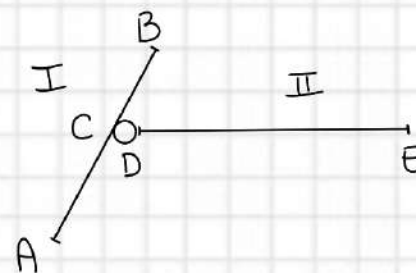


CERNIERA INTERNA

Vincolo doppio $\Rightarrow \Delta S_{CD} = 0$

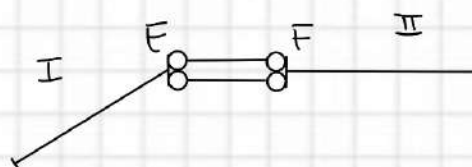
La struttura è dotata di 4 gdl: inizio considerando solo il corpo I, scelgo come coordinate lagrangiane u_A, v_A, ϕ_A ; considerando ora il corpo II noto che esso può ruotare quindi le mie coordinate lagrangiane sono:

$u_A, v_A, \phi_A, \Delta \phi_{I-II}$



DOPPIO PENDOLO INTERNO

Vincolo doppio $\Rightarrow \begin{cases} \Delta S_{EF}^d = 0 \\ \Delta \phi_{EF} = 0 \end{cases}$



INCASTRO INTERNO

Vincolo triplo $\Rightarrow \begin{cases} \Delta S_{EF}^d = 0 \\ \Delta \phi_{EF} = 0 \end{cases}$



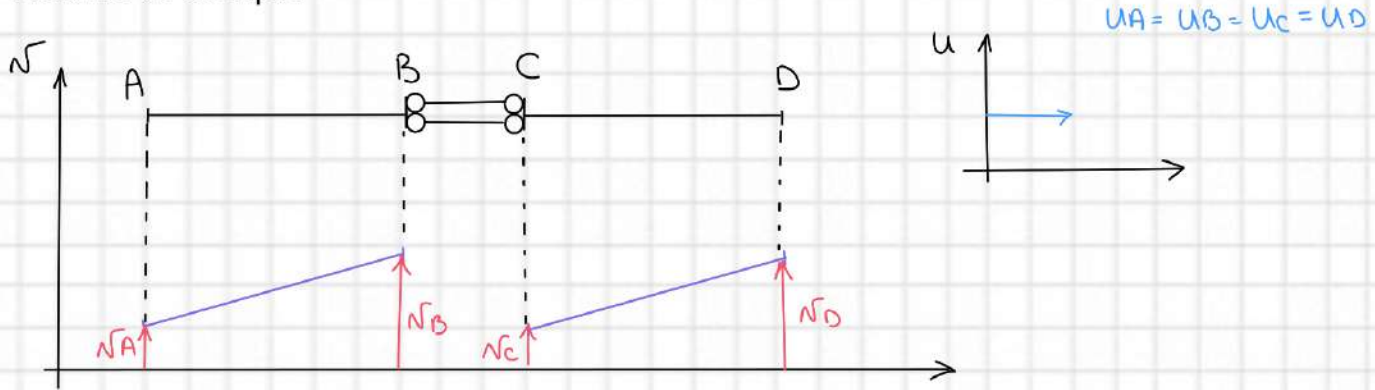
Ogni vincolo assoluto ha il suo corrispondente vincolo relativo!

Un modo efficace per capire le coordinate di un sistema fatto da più corpi è quello di prendere gli spostamenti assoluti di un tratto e gli spostamenti relativi di un tratto rispetto all'altro.

CATENE CINEMATICHE

Rappresentazione del campo degli spostamenti.

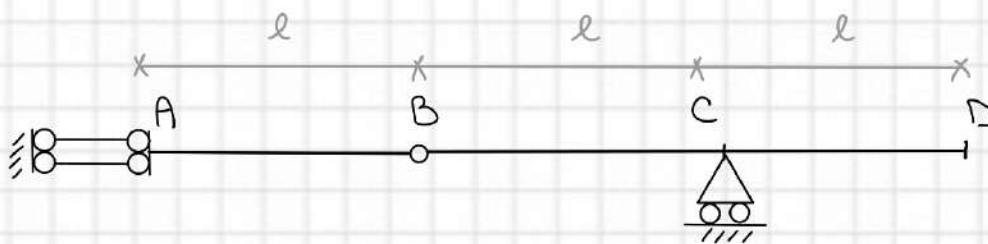
Vediamo un esempio:



OSS: la struttura di quanti corpi rigidi è composta?

Potrei dire 1 ma anche 2, 3, ..., ∞ dipende dall'interpretazione che voglio dargli.

ES: di quanti corpi rigidi è composta?



In questo caso è più comodo considerare due tratti:

- tratto $\overline{AB}$
- tratto $\overline{BD}$

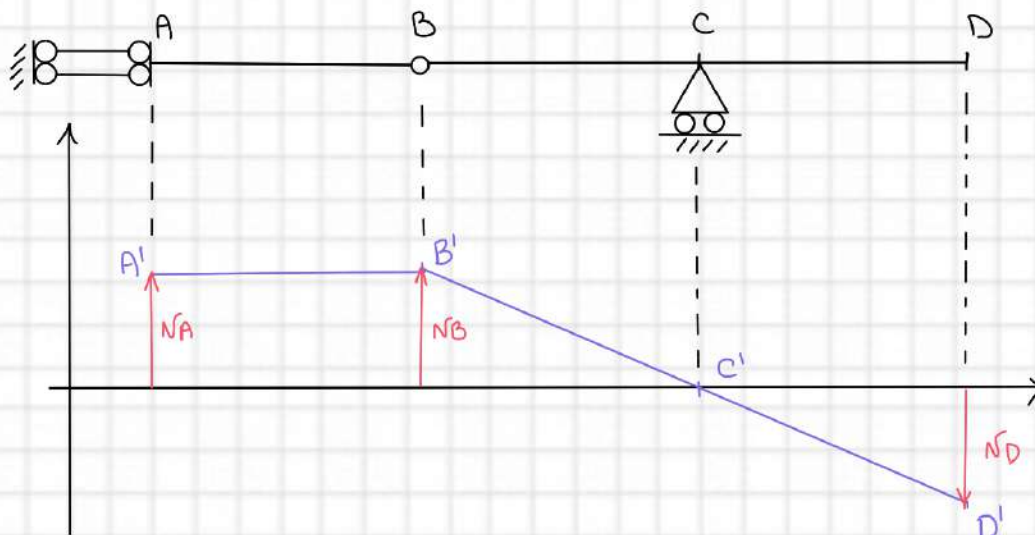
In A abbiamo un vincolo esterno doppio pendolo $\Rightarrow$ vincolo doppio

In B abbiamo un vincolo interno cerniera $\Rightarrow$ vincolo doppio

In C abbiamo un vincolo esterno carrello $\Rightarrow$ vincolo singolo

Si hanno quindi $6 \text{ (gdl)} - 5 \text{ (vincoli)} = 1 \text{ gdl}$

Vediamo le catene cinematiche:



C non si muove perché è presente un incastro interno.

EQUAZIONE FONDAMENTALE

Ci permette di classificare le strutture $\rightarrow 3t - s = l - i$

- | | | | |
|----|---|---|----------|
| t | <u>numero di tratti</u> di cui è composta la struttura, | } | ≥ 0 |
| 3t | <u>numero di gdl</u> della struttura senza vincoli, | | |
| s | <u>ordine</u> totale dei vincoli $\Rightarrow$ potenza che i vincoli hanno nell'eliminare i gdl, | | |
| l | <u>labilità</u> del sistema $\Rightarrow$ numero di gdl della struttura vincolata, | | |
| i | <u>ipervincolo</u> $\Rightarrow$ ordine dei vincoli che posso eliminare senza alterare la labilità del sistema. | | |

ES: uso della formula.

$$3t - s = 3 \cdot 1 - 2 = 1$$

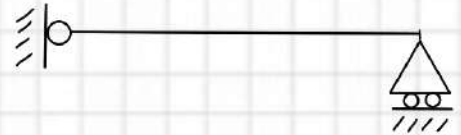
$$l - i = 1 \Rightarrow i = 2 - 1 = 1$$

Abbiamo un vincolo che non svolge correttamente il suo lavoro.

ES: uso della formula.

$$3t - s = 3 \cdot 1 - 3 = 0$$

$$l - i = 0 \Rightarrow l = i$$



CLASSIFICAZIONE DELLE STRUTTURE

Dall'equazione fondamentale $3t - s = l - i$ possiamo classificare le se strutture:

$$3t - s > 0 \Rightarrow l > 0$$

Struttura labile (o ipostatica): struttura dotata di cinematismi, che si può muovere.

$$3t - s < 0 \Rightarrow i > 0$$

Struttura ipervincolata (o iperstatica): struttura di vincoli superflui dal punto di vista cinematico.

$$3t - s = 0 \Rightarrow l = i$$

Struttura isostatica (o isocinematica): struttura non dotata di cinematismi e senza la presenza di vincoli superflui (struttura perfetta).

> 0 Struttura che è contemporaneamente labile e ipervincolata.

ES: uso della formula

$$3t - s = 3 - 2 = 1$$

$\Rightarrow l > 0$: struttura labile



ES: uso della formula

$$3t - s = 3 - 3 = 0$$

$\Rightarrow l = i = ?$



è evidente che $l = i = 1$

ES: uso della formula

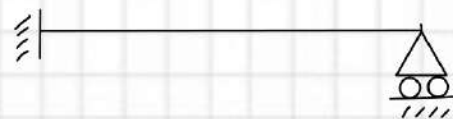
$$3t - s = 3 - 4 = -1$$

$\Rightarrow l > 0$

$i = ?$

$l = ?$

indica che sono presenti vincoli inutili



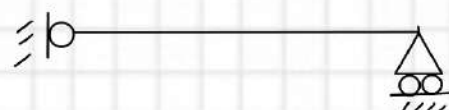
L'utilizzo della equazione è utile ma non dà tutte le informazioni.

ES: uso della formula

$$3t - s = 3 - 3 = 0$$

Posso avere due casi:

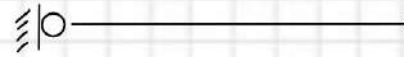
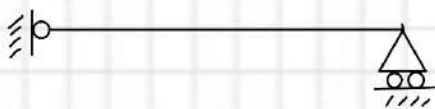
$$l = i \begin{cases} = 0 & \text{isostatica} \\ > 0 & \text{labile o ipervincolata} \end{cases}$$



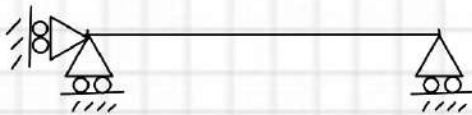
METODO ISPETTIVO

Metodo qualitativo e non analitico (non garantisce la soluzione esatta). Guardando la struttura si cerca di capire se tutti i vincoli sono utili; si cerca di degradare la struttura per vedere se si introduce labilità.

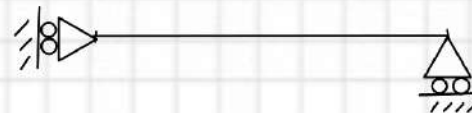
ES:



Si introduce labilità: $I = 1$



Si introduce labilità: $I = 1$



Si introduce labilità: $I = 1$

Con il metodo ispettivo si conclude che $i = I = 0$ dato che se tolgo un vincolo si introduce labilità.

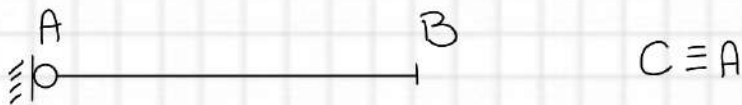
METODO GRAFICO

Metodo analitico. Si basa sui seguenti teoremi:

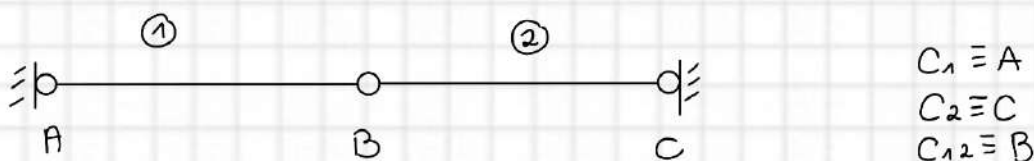
TEO 1 Un sistema rigido costituito da n tratti è labile sse per ciascuna coppia di tratti rigidi i e j , i centri C_i , C_j , C_{ij} risultano allineati.

TEO 2 Un sistema rigido costituito da n tratti ($n > 3$) è labile sse per ciascuna terna di tratti rigidi i , j e k , i centri di rotazione relativa C_{ij} , C_{ik} e C_{jk} risultano allineati.

ES: centro di rotazione.



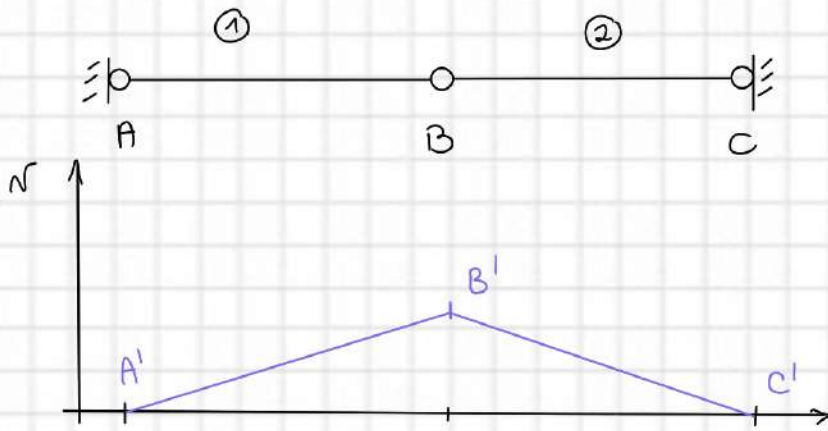
ES: centro di rotazione.



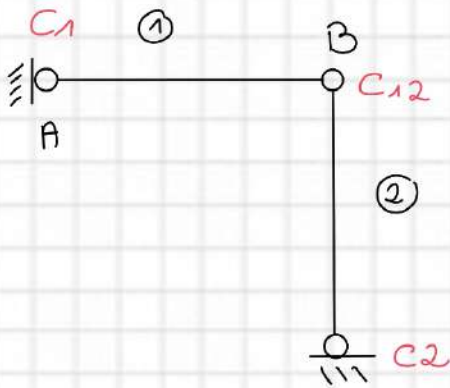
$C_1 \equiv A$
 $C_2 \equiv B$
 $C_{12} \equiv C$

Per avere un moto relativo tra il corpo 1 e il corpo 2, i centri C_1 , C_2 , C_{12} devono essere allineati.

Catene cinematiche:

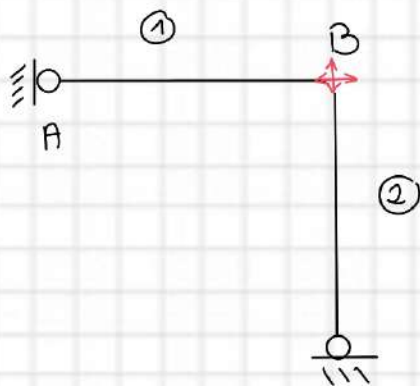


ES: arco a tre cerniere non allineate.



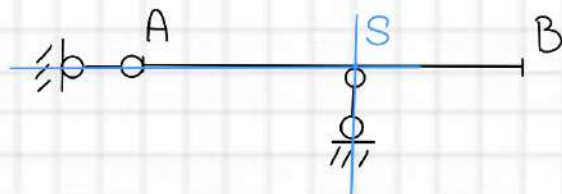
La struttura non è dotata di cinematismo dato che i centri di rotazione non sono allineati.
 $\Rightarrow I = 0$

Lo si può capire anche dal metodo ispettivo eliminando il vincolo cerniera interna.



Togliendo il vincolo cerniera interna la struttura è dotata di 2 gdl.

ES: centro di rotazione.



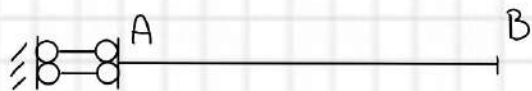
$$C \equiv S$$

ES: centro di rotazione.



$$C \equiv S$$

ES: centro di rotazione.

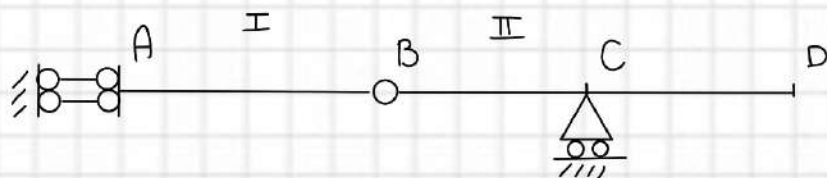


$$C \equiv \leftrightarrow_{\infty}$$

il centro di rotazione coincide con un punto della retta orizzontale all'infinito

Quindi anche un doppio pendolo (che ha rotazione nulla) ha un centro di rotazione che però è all'infinito.

ES: studiare la cinematica della seguente struttura.



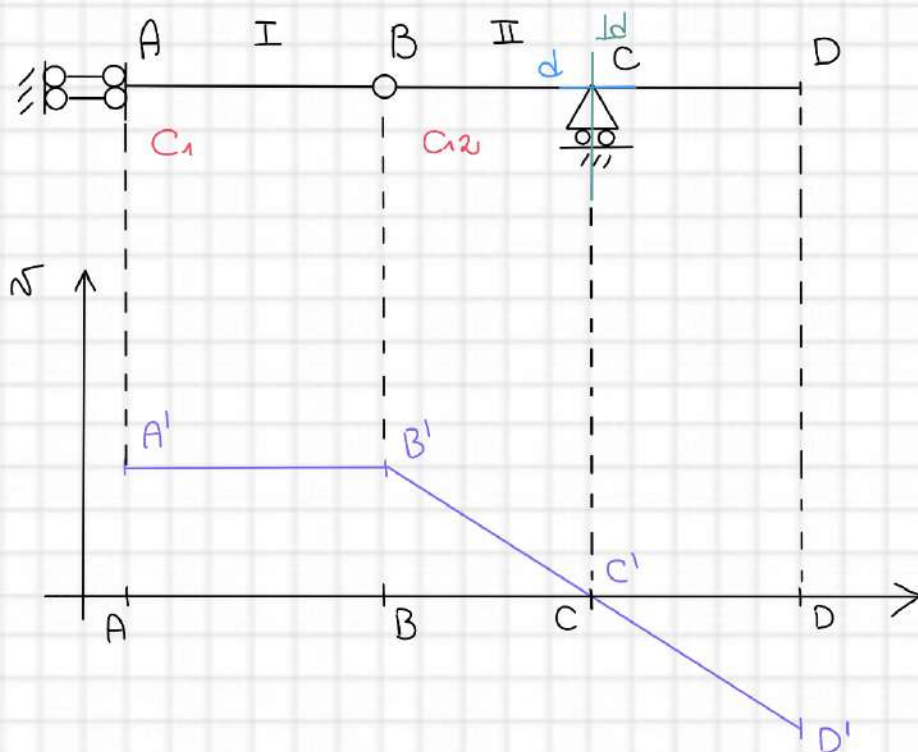
$$3t - s = l - i$$

$$t = 2$$

$$s = 5$$

$$\Rightarrow 3t - s = 1 \quad \Rightarrow \quad l > 0 \quad \text{struttura labile}$$

Catene cinematiche:



$$C_1 \equiv \leftrightarrow_{\infty}$$

$$C_2 \in \mathcal{L}_D \quad (\text{posso supporre } C_2 = C)$$

$$C_{12} \equiv B$$

$\Rightarrow$ i centri sono allineati quindi la struttura è dotata di cinematismi (ha labilità 1)

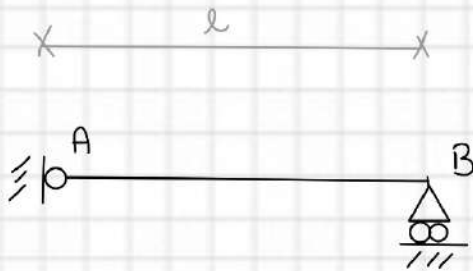
METODO ANALITICO

Si basa su una serie di step:

1. si considera la struttura senza vincoli,
2. si scelgono delle opportune coordinate lagrangiane,
3. si scrivono le equazioni di vincolo (codizioni imposte dai singoli vincoli agenti sulla struttura reale),
4. si ri-scrivono le equazioni di vincolo in funzione delle coordinate lagrangiane $\Rightarrow$ si ottiene un sistema di equazioni lineari del tipo $Ax = 0$,
5. si studia il rango della matrice A .

$$I = \dim(A) - r(A) \quad \begin{cases} = 0 \rightarrow \text{struttura isostatica} \\ > 0 \rightarrow \text{struttura labile} \end{cases}$$

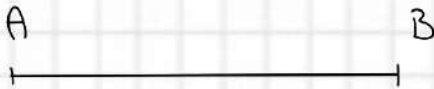
ES: studiare la struttura con il metodo analitico.



$$3t - S = 3 - 3 = 0$$

$$l - i = 0 \rightarrow \text{situazione ambigua}$$

struttura senza vincoli



gdl

$$u_A, N_A, \phi_A$$

equazioni di vincoli

vincolo cerniera in A

$$u_A = 0$$

$$N_A = 0$$

vincolo carrello a scorrimento orizzontale in B

$$N_B = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} u_A = 0 \\ N_A = 0 \\ N_B = 0 \end{array} \right\} S = 3$$

equazioni in funzione dei gdl

$$u_A = 0 \quad \text{OK}$$

$$N_A = 0 \quad \text{OK}$$

$$N_B = 0 \Rightarrow N_A + \phi_A l = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_A = 0 \\ N_A = 0 \\ N_A + \phi_A l = 0 \end{array} \right.$$

sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \phi_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & l \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = l \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$$

$$l = \dim(A) - r(A) = 0 \rightarrow \text{struttura isostatica}$$

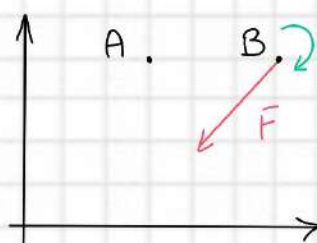
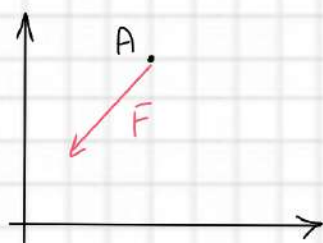
EQUILIBRIO DEL CORPO RIGIDO

Per parlare di equilibrio bisogna capire quali sono le tipologie di azioni che possono agire sul corpo.

Considereremo:

- forze concentrate: vettore applicato a un punto,
 - coppie concentrate,
 - sistema di forze concentrate,
 - sistema di coppie concentrate,
 - sistemi di forze e coppie equivalenti: equivalenti perchè caratterizzati dalla stessa risultante e dallo stesso momento risultante.
- } è quindi importante introdurre il concetto di risultante di forze e coppie concentrate

ES: sistemi di forze e coppie equivalenti.



Assioma di equilibrio: Un corpo rigido è in equilibrio se e solo se

$$\begin{cases} R = 0 \\ M = 0 \end{cases}$$

Un corpo rigido 2D è in equilibrio sse ha:

- 2 equazioni di equilibrio alla traslazione,
- 1 equazioni di equilibrio alla rotazione.

Un corpo rigido 3D è in equilibrio sse ha:

- 3 equazioni di equilibrio alla traslazione,
- 3 equazioni di equilibrio alla rotazione.

OSS: C'è dualità tra il mondo della cinematica e quello dell'equilibrio. Un esempio si vede nel modello di corpo rigido in cui si hanno traslazioni e rotazioni nella cinematica che nel mondo dell'equilibrio si traducono in forze e coppie.

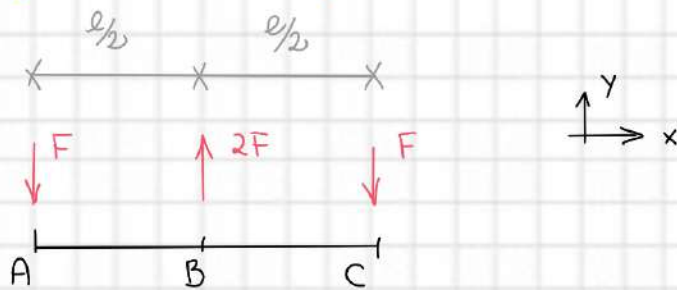
Quindi si ha equilibrio se valgono:

$$R = 0 \quad R = \sum_i F_i = 0$$

$$M = 0 \quad M = \sum_j M_j + \sum_i x_i \times F_i = 0$$

vettore distanza tra il punto di applicazione della forza e il polo

ES: la seguente struttura è in equilibrio?



Vediamo se sono soddisfatte le equazioni di equilibrio:

$$\sum F_x = 0 \quad \text{Ok'!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad -F + 2F - F = 0 \quad \text{Ok'!}$$

$$\sum M_c = 0 \quad F \ell - 2F \frac{\ell}{2} = 0 \quad \text{Ok'!}$$

tutte e tre le equazioni sono nulle
 $\Rightarrow$ sistema in equilibrio

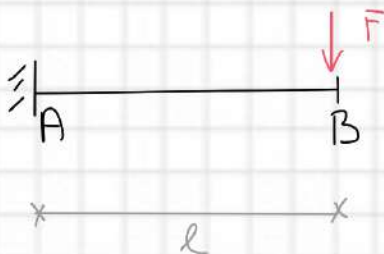
EFFETTO STATICO DI UN VINCOLO

Il vincolo ha un effetto cinematico e un effetto statico. Per effetto statico si intende che un vincolo reagisce ovvero che esso è capace di indurre una forza.

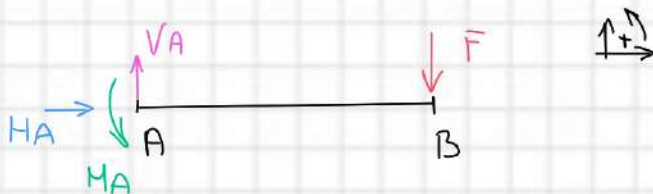
ES: se tengo la mano sopra un tavolo (senza toccarlo), esso non esercita alcuna forza sulla mia mano; se la metto sul tavolo e spingo il tavolo esercita una forza non nulla.

Quindi il vincolo esercita una forza se si cerca di violare tale vincolo.

ES: struttura con vincolo a incastro su A.



Disegno le possibili reazioni del vincolo; dipendono se la struttura sta cercando cinematicamente di violare il vincolo.

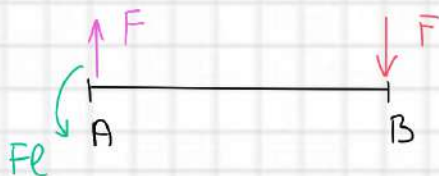


$$\begin{cases} H_A = 0 & \text{equazione alla traslazione orizzontale} \\ V_A - F = 0 & \text{equazione alla traslazione verticale} \\ M_A - F\ell = 0 & \text{equazione alla rotazione (polo A)} \end{cases}$$

Impongo l'equilibrio sulla struttura per il calcolo delle reazioni vincolari:

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = F \\ M_A = Fe \end{cases}$$

Disegno la struttura con le azioni e le reazioni vincolari trovate:

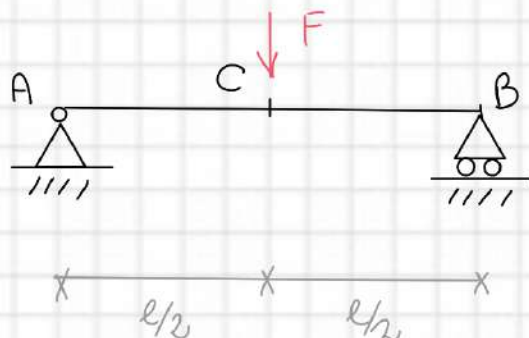


I passaggi sono:

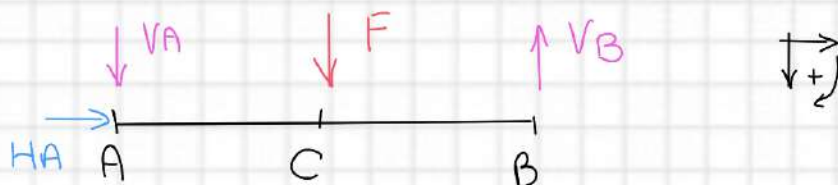
1. disegnare la struttura con i possibili sistemi di reazioni vincolari,
2. scrivere e risolvere le equazioni di equilibrio,
3. ridisegnare la struttura con le sue reazioni vincolari,
4. controllare che la struttura con le reazioni vincolari calcolate sia effettivamente in equilibrio.

Riprendendo il discorso dell'effetto statico, abbiamo capito che se un vincolo blocca un gdl, è in grado di indurre la corrispondente reazione vincolare.

ES: studiare la seguente struttura.



1. Disegnare la struttura con i possibili sistemi di reazioni vincolari:

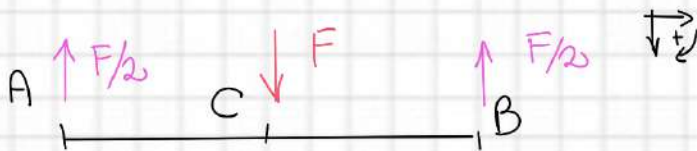


- in A ho una cerniera che blocca lo spostamento verticale e orizzontale,
- in B ho un carrello a scorrimento orizzontale che blocca lo spostamento verticale.

2. Scrivere e risolvere le equazioni di equilibrio (polo B):

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + F - V_B = 0 \\ -V_A l - F \frac{l}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = -\frac{F}{2} \\ V_B = \frac{F}{2} \end{cases}$$

3. Ridisegnare la struttura con le sue reazioni vincolari:



4. Controllare che la struttura con le reazioni vincolari calcolate sia effettivamente in equilibrio

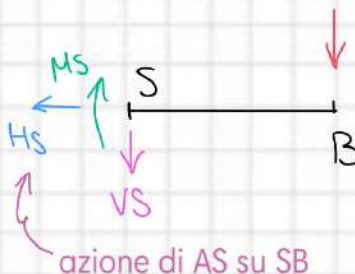
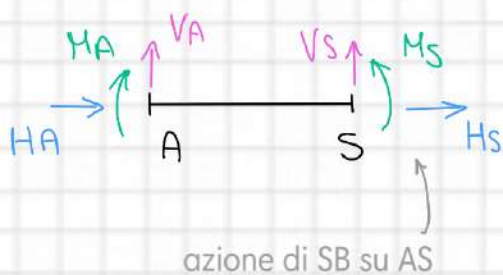
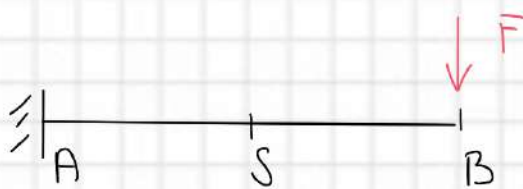
$$\sum F_x = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad -\frac{F}{2} + F - \frac{F}{2} = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum M_B = 0 \quad \frac{F}{2} l - F \frac{l}{2} = 0 \quad \text{OK!}$$

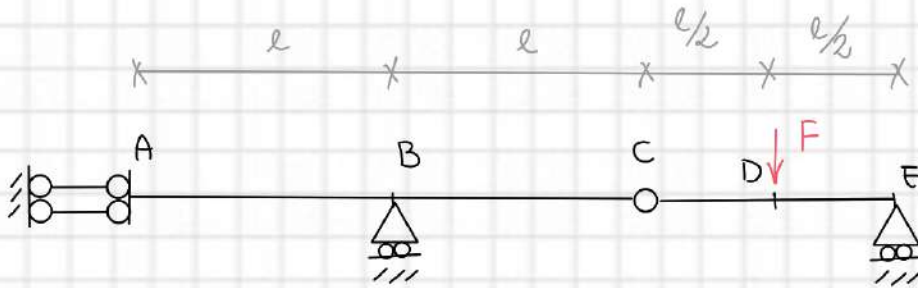
ES: struttura con vincolo interno.

Ipotizzo la struttura come composta da due tratti (come se ci fosse un vincolo incastro interno in S)

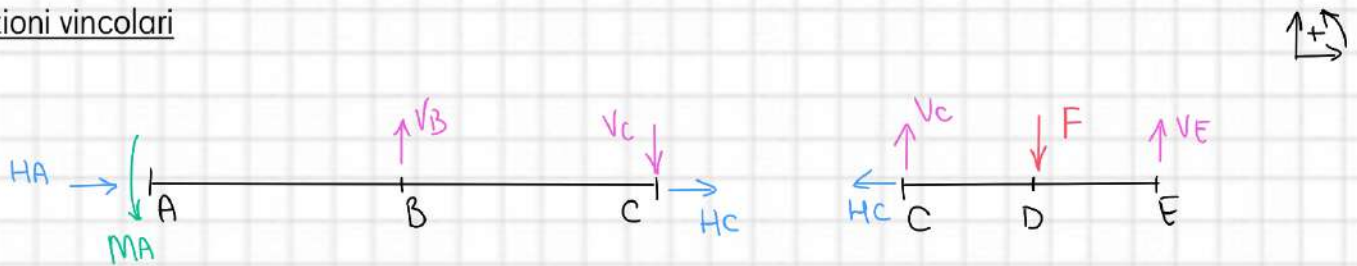


ESERCIZI

ES1: Data la seguente struttura, fare l'analisi statica scrivendo le equazioni e risolvendole man mano.



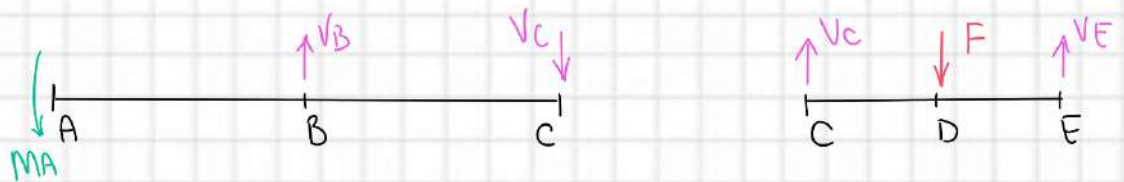
reazioni vincolari



equazioni di equilibrio

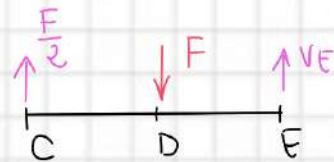
$$H_C = 0$$

$$H_A = 0$$



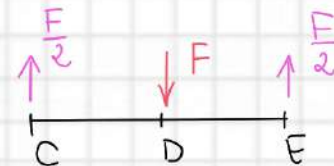
calcolo l'equilibrio attorno ad E:

$$V_C - F \frac{l}{2} = 0 \rightarrow V_C = \frac{F}{2}$$



calcolo l'equilibrio alla traslazione verticale del tratto II:

$$\frac{F}{2} + V_E - F = 0 \rightarrow V_E = \frac{F}{2}$$



verifico che il tratto II si in equilibrio:

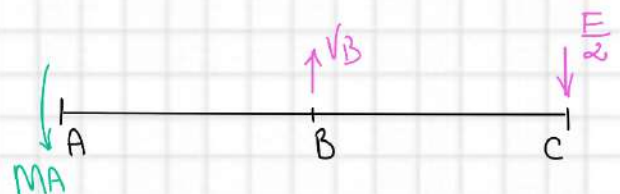
$$\sum F_x = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \frac{F}{2} - F + \frac{F}{2} = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum M_D = 0 \quad -\frac{F}{2} \frac{l}{2} + \frac{F}{2} \frac{l}{2} = 0 \quad \text{OK!}$$

vediamo il tratto I:

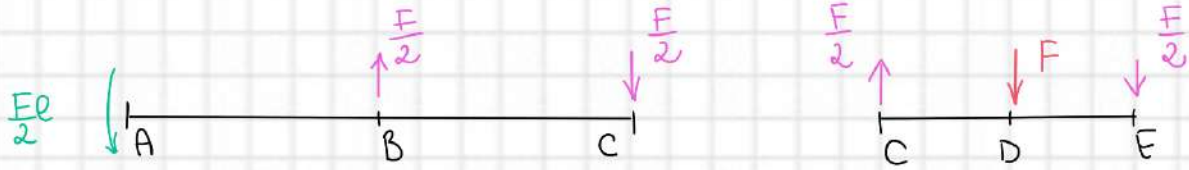
$$V_B - \frac{F}{2} = 0 \rightarrow V_B = \frac{F}{2}$$



calcolo l'equazione di equilibrio alla rotazione (polo A):

$$M_A + \frac{F}{2} \ell - \frac{F}{2} \ell = 0 \rightarrow M_A = \frac{F \ell}{2}$$

si ottiene:



OSS: La formula $3t - s = I - i$ è fondamentale sia per lo studio della cinematica, sia per l'analisi statica dato che rappresentano:

- $3t$: # equazioni di equilibrio del sistema,
- s : # incognite del sistema.

$$3t - s > 0 \Rightarrow I > 0$$

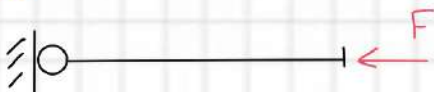
Struttura labile (ipostatica) si hanno troppe equazioni rispetto al numero di incognite.
 $\Rightarrow$ non è garantito l'equilibrio.

ES:



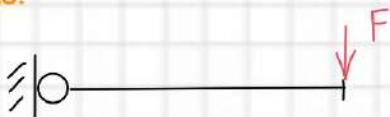
Si hanno 3 equazioni di equilibrio e 2 incognite quindi non è detto che sia in grado di soddisfare la condizione di equilibrio, dipende dalla condizione di carico.

ES:



struttura in equilibrio!

ES:

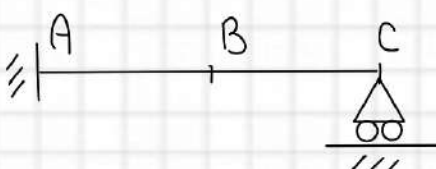


La struttura è in equilibrio sse $F = 0$ o $l = 0$.

$$3t - s < 0 \Rightarrow i > 0$$

Struttura iperstatica (ipervincolata): equilibrio sempre soddisfatto ma non si riesce sempre a calcolare le reazioni vincolari.

ES:



Ho 3 equazione e 4 incognite; l'equilibrio non è sufficiente per calcolare le reazioni vincolari.

$$3t - s = 0 \Rightarrow l = i > 0$$

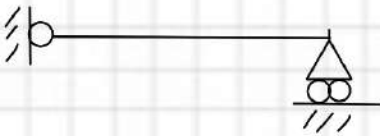
Struttura che è contemporaneamente labile e ipervincolata quindi può essere in equilibrio (dipende dalle condizioni di carico) e se lo è non è possibile determinare le reazioni vincolari.

$$= 0$$

Struttura isostatica (o isocinematica): struttura perfetta dal punto di vista:

- cinematico perché ogni vincolo funziona bene,
- statico perché il sistema ammette una e una sola soluzione (il rango della matrice A è massimo) → indipendente dal carico applicato (le sole equazioni di equilibrio determinano le reazioni vincolari).

ES:



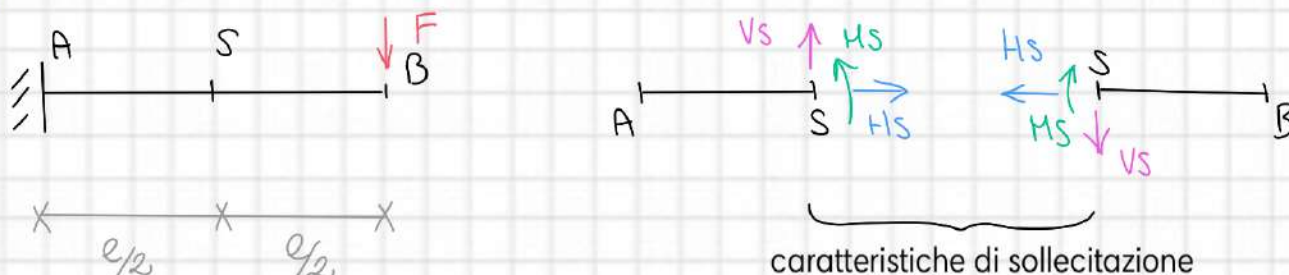
$$3t - s = 0 \quad l = i = 0$$

Il mondo della cinematica e quello dell'equilibrio sono duali l'uno dall'altro; è su tale dualità che si basa il principio dei lavori virtuali.

CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

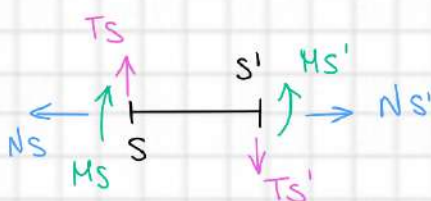
Si intende delle informazioni su come parti diverse della struttura interagiscono. In particolare, se ho una struttura e considero una sezione S, le caratteristiche di sollecitazione sono le azioni che due parti della struttura si scambiano attraverso la sezione.

ES:



CONVENZIONI

Considero un elementino di trave (o coccio di trave)



Ns': sforzo o azione normale

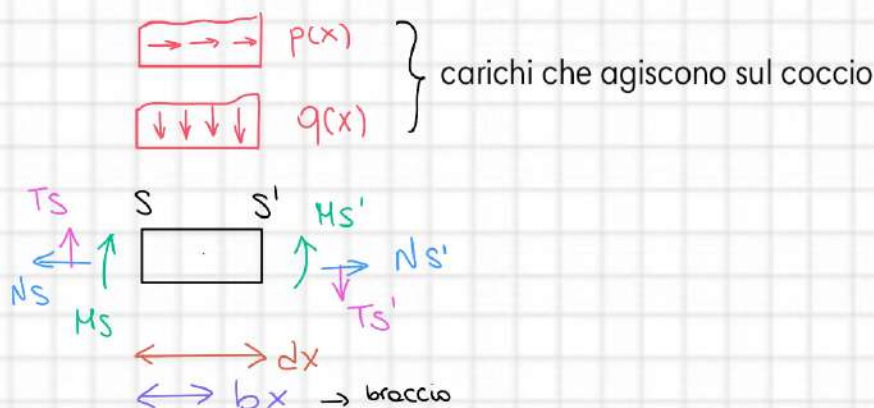
Ts': sforzo o azione di taglio

Ms': sforzo o azione flettente

E' estremamente importante per capire quale tratto della struttura è più soggetto a sollecitazione quindi dove potenzialmente andrà a rompersi.

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO DI UNA TRAVE

Prendo un coccio di trave e impongo l'equilibrio richiedendo che la dimensione del coccio vada a 0.



Equilibrio:

$$\sum F_x = 0$$

$$N_{S'} - N_S + \int_{dx} p(x) dx = 0$$

equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale in forma algebrica

$$N_S = N(x)$$

$$N_{S'} = N(x+dx) = N(x) + \frac{dN}{dx} dx + \dots$$

termini di ordine superiore che posso trascurare

$$N(x) + \frac{dN}{dx} dx - N(x) + p(x) dx + \cancel{\dots} = 0$$

$$\frac{dN}{dx} \cancel{dx} + p(x) \cancel{dx} = 0$$

$$\frac{dN}{dx} + p = 0 \rightarrow \boxed{N' + p = 0}$$

equazione indefinita di equilibrio
alla traslazione orizzontale in
forma differenziale

$$\sum F_y = 0 \quad T_{S'} - T_S + \int_{dx} q(x) dx = 0$$

$$T(x+dx) - T(x) + \int_{dx} q(x) dx = 0$$

$$\cancel{T(x)} + T'(x) \cancel{dx} - \cancel{T(x)} + q(x) \cancel{dx} = 0$$

$$\boxed{T' + q = 0}$$

$$\sum M_S = 0 \quad -T_{S'} dx + M_{S'} - \int_{dx} q(x) dx \cdot bx - M_S = 0$$

$$- [T(x) + T' dx] dx + \cancel{M(x)} + M' dx - q(x) dx \overbrace{\frac{dx}{2}}^{bx} - \cancel{M(x)}$$

$$-T dx + \cancel{T' dx^2} + M' dx - \cancel{q \frac{dx^2}{2}}$$

$$\cancel{M' dx} - \cancel{T dx} = 0$$

$$\boxed{M' - T = 0}$$

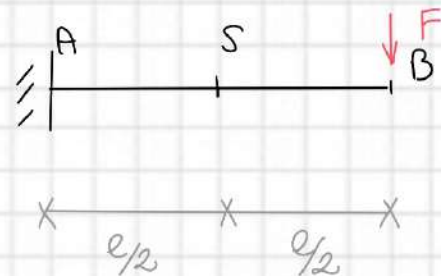
⇒ le equazioni indefinite di una trave sono:

$$\begin{cases} N' + p = 0 \\ T' + q = 0 \\ M' - T = 0 \end{cases}$$

ES: calcolare le caratteristiche di sollecitazione della seguente struttura in S.

Si hanno 2 metodi:

1. considerare prima il tratto AS e calcolarne l'equilibrio poi lo stesso con il tratto SB,
2. calcolare $N(x)$, $T(x)$, $M(x)$ e poi sostituire $x = \frac{l}{2}$

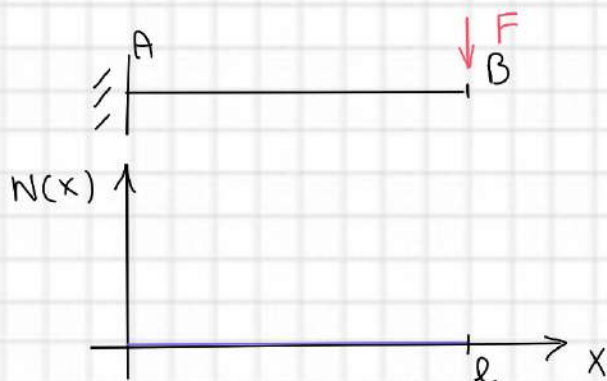


Utilizziamo il secondo metodo:

$$N' + p = 0 \quad \Rightarrow \quad N' = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \text{cost} = C_1$$

$\underbrace{\quad}_{=0}$

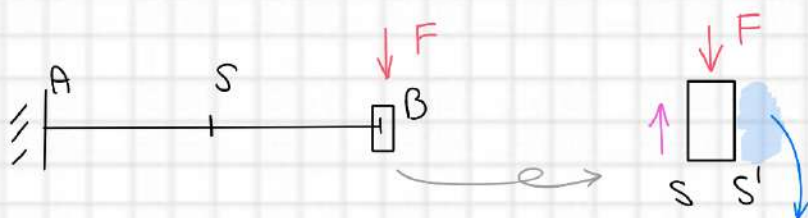
per capire quanto vale N devo considerare le condizioni al bordo. Si ha che $N = 0$



$$T' + q = 0 \quad \Rightarrow \quad T' = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \text{cost} = C_2$$

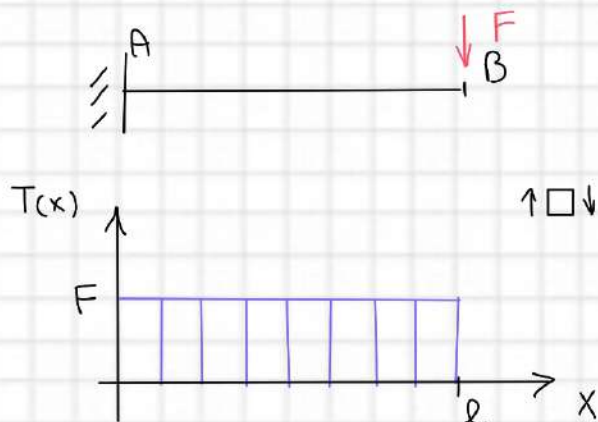
$\underbrace{\quad}_{=0}$

considero le condizioni al bordo di un elementino di trave:



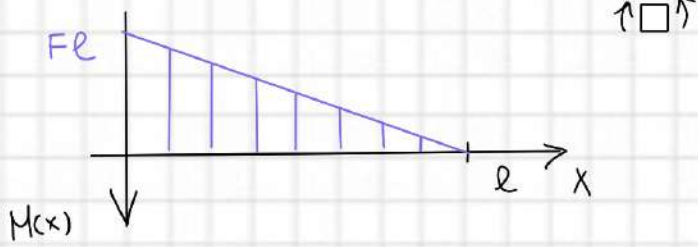
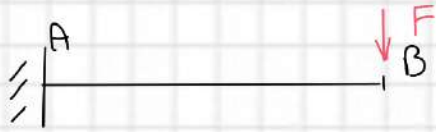
$$C_2 - F = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = F$$

qui non ci sono caratteristiche di sollecitazione perchè dopo S' non c'è niente

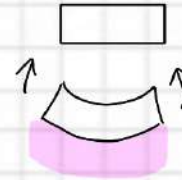


$\uparrow \square \downarrow$ (convenzione)

$$M' - \underbrace{T}_=F = 0 \Rightarrow M' = F \Rightarrow M = Fx + C_3$$



il diagramma del momento si disegna
sempre dal lato delle fibre tese



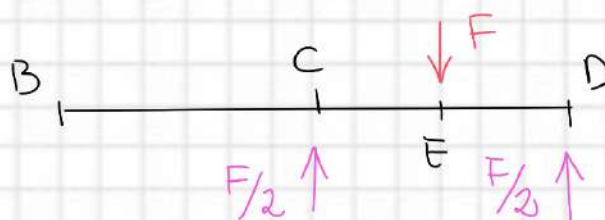
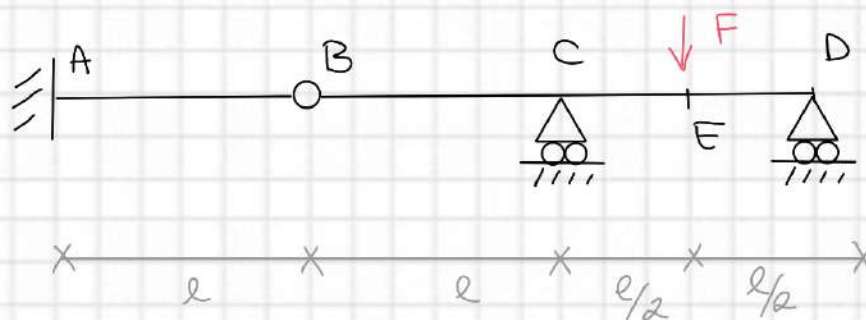
ES: disegnare le caratteristiche di sollecitazioni della seguente struttura.

Si deve prima fare l'analisi cinematica e statica.

ANALISI CINEMATICA ...

ANALISI STATICA

struttura con reazioni vincolari



verifica

$$\sum F_x = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \frac{F}{2} - F + \frac{F}{2} = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum M_D = 0 \quad -F \frac{l}{2} + \frac{F}{2} l = 0 \quad \text{OK!}$$

CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

$$\begin{cases} N' \pm p = 0 \\ T' \pm q = 0 \\ M' - T = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} p = 0 \\ q = 0 \end{matrix} \quad \begin{cases} N = \text{cost} \\ T = \text{cost} \\ M = \text{linear} \end{cases}$$

sforzo di taglio

Per calcolare il valore di T devo considerare i tratti:

-]A, B[
-]B, C[
-]C, E[
-]E, D[

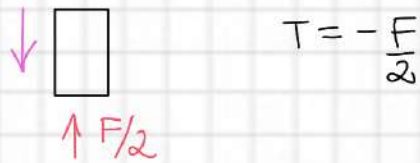
I tratti]A, B[e]B, C[sono scarichi quindi $T = 0$.

Considero il coccio di trave in C:



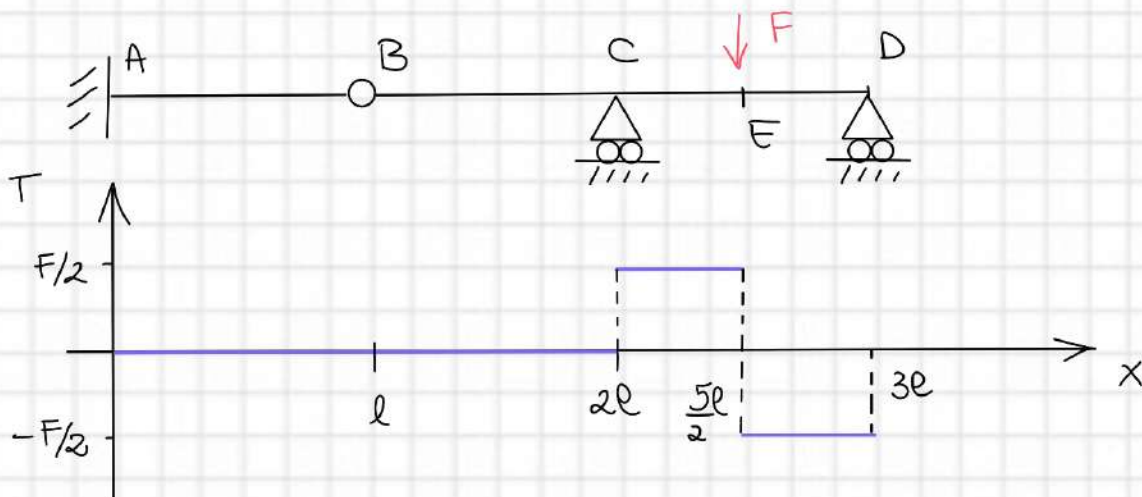
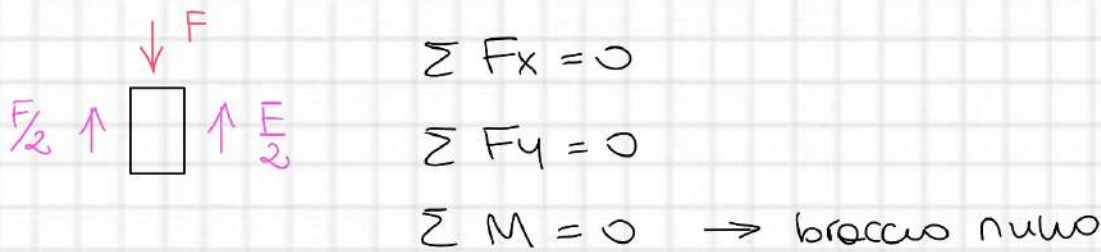
a sx non metto le caratteristiche dato che il tratto precedente è completamente scarico.

Considero il coccio di trave in D:



a sx la freccia dovrebbe essere verso l'alto quindi aggiungo un segno negativo.

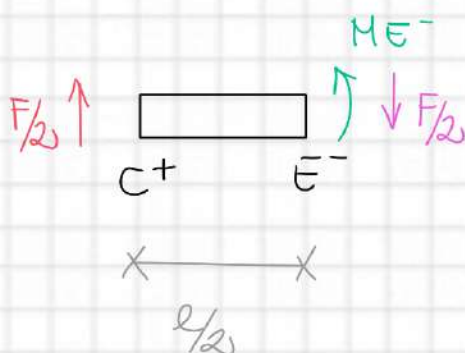
Considero il coccio di trave in E:



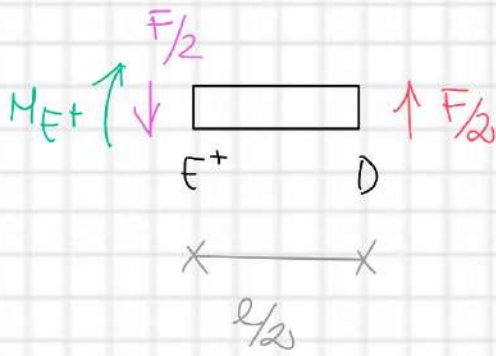
sforzo flettente

NB: il diagramma si traccia dal lato delle fibre tese!

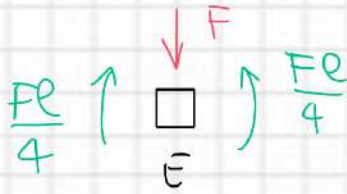
Considero i cocci di trave:



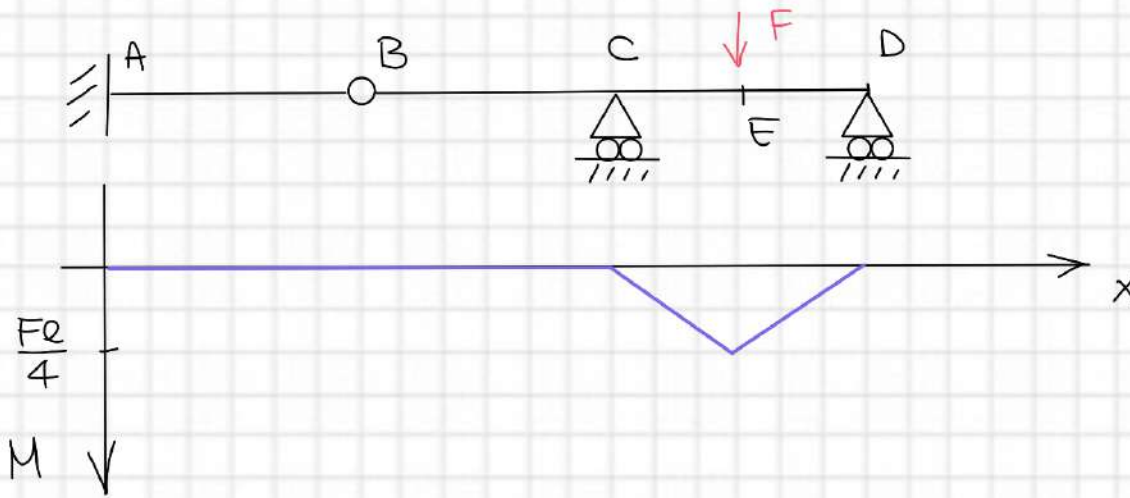
$$M_{E^-} - \frac{F}{2} \cdot \frac{l}{2} = 0 \quad M_{E^-} = \frac{Fl}{4}$$



$$-M_{E^+} + \frac{F}{2} \frac{l}{2} = 0 \quad M_{E^+} = \frac{Fl}{4}$$



$$\frac{Fl}{4} - \frac{Fl}{4} = 0$$



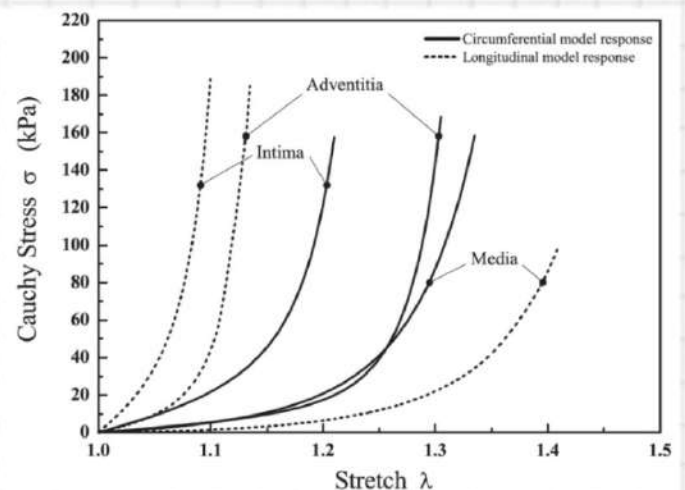
CORPI DEFORMABILI - TEST DI TRAZIONE

I corpi deformabili sono corpi non rigidi.

I test di trazione sono dei test che si fanno in laboratorio per caratterizzare i corpi deformabili.

La risposta di un oggetto dipende fortemente dalla natura di un materiale; ad esempio, se faccio cadere un bicchiere di cristallo e uno di argento quello di cristallo si rompe mentre quello di argento no.

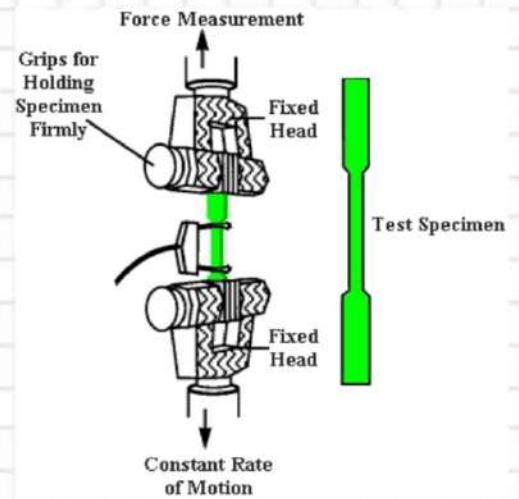
Per quanto riguarda i tessuti biologici la faccenda si complica ulteriormente. Ad esempio l'aorta è caratterizzata da risposte alla trazione differenti a seconda della sezione che viene prelevata.



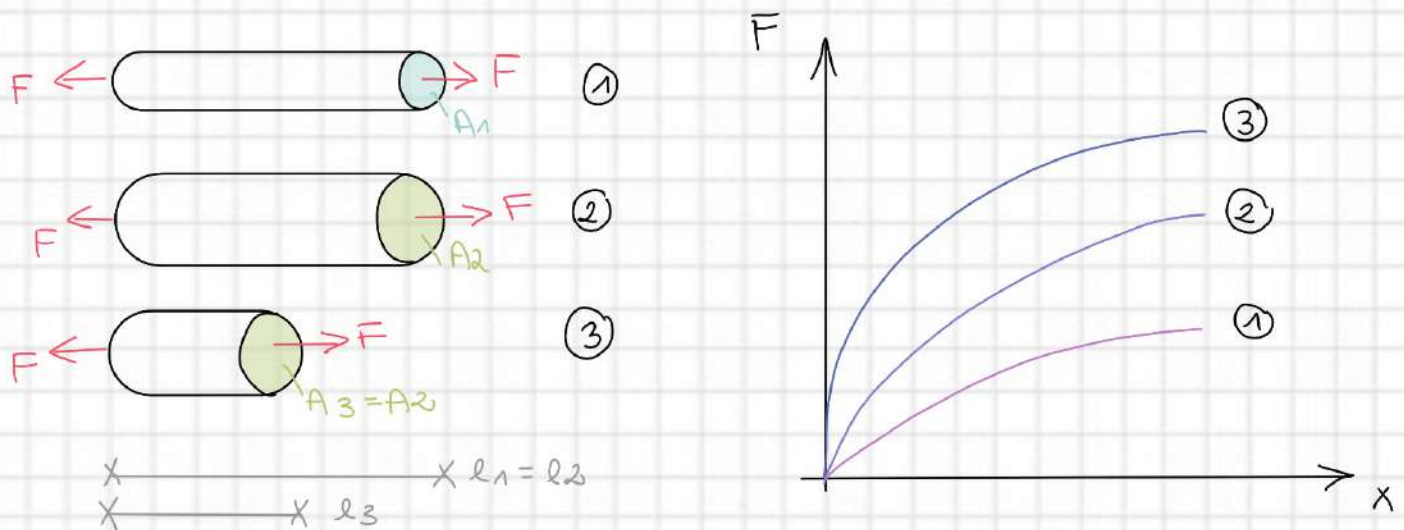
Per determinare se un corpo è deformabile, si prende un campione e gli si applica una forza.

La macchina di prova è una macchina che ha due afferraggi all'interno dei quali si inserisce un provino a forma di osso di cane. Generalmente uno dei due afferraggi è fermo e l'altro tira il provino.

Si misura la forza e l'allungamento tra due sezioni.



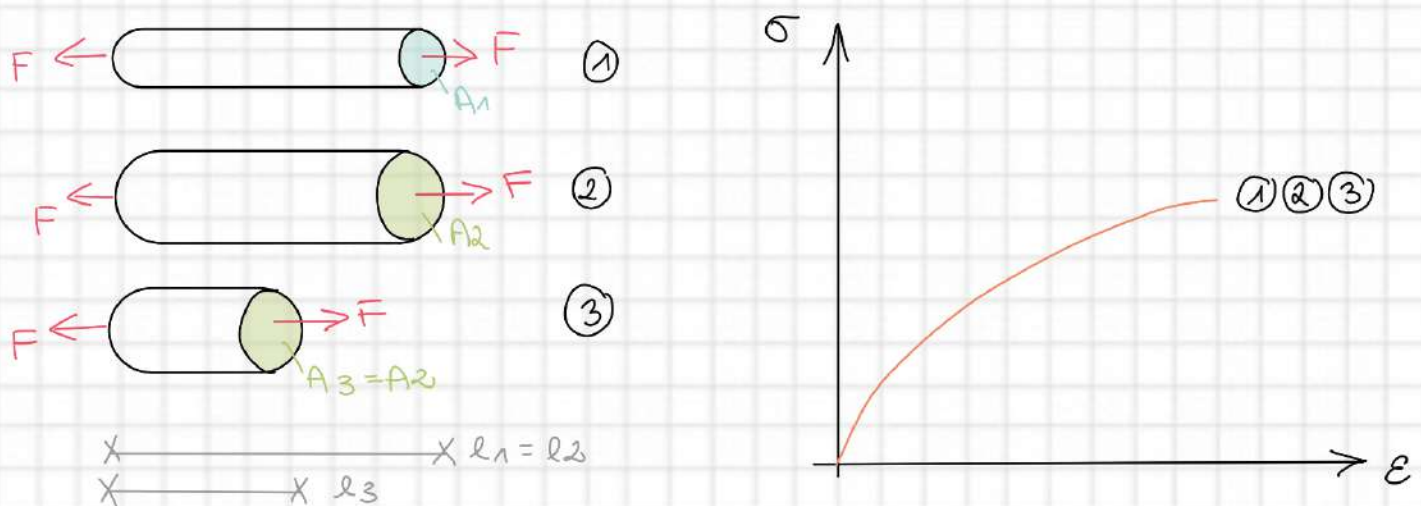
Consideriamo tre provini dello stesso materiale ai quali applico la stessa forza:



Dal diagramma forza-allungamento è evidente che c'è dipendenza dalla geometria del provino. Quindi, in questo caso, non siamo riusciti a caratterizzare il materiale. Per farlo bisogna introdurre due concetti:

- stato tensionale (o stress) interno $\sigma = \frac{F}{A_0}$
- spostamento relativo (o deformazione) interno $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

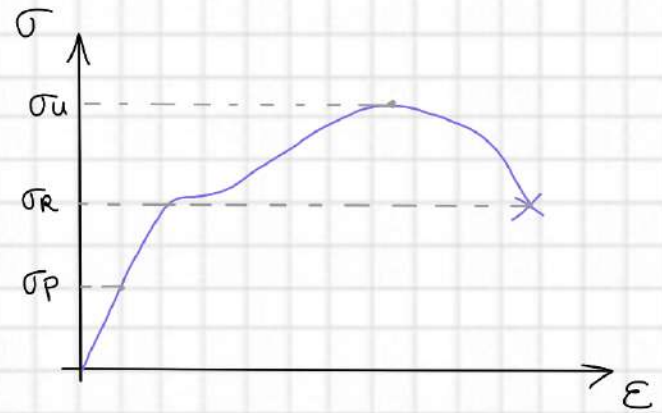
Se faccio il diagramma stress-strain per gli stessi tre provini precedenti le curve coincidono!



Quindi per caratterizzare il materiale si deve fare un diagramma stress-deformazione.

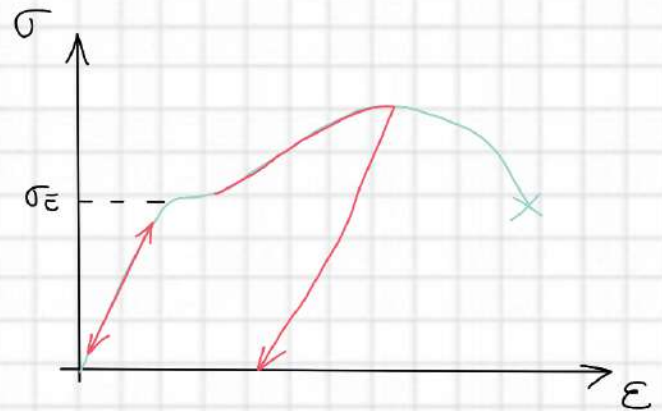
Vediamo una curva tipica di un provino in acciaio:

- σ_R : tensione a rottura,
- la curva è inizialmente monotona crescente → significa che per avere allungamento si deve incrementare la forza,
- σ_u è il punto limite oltre il quale il corpo si sfibra → tensione ultima,
- σ_P indica il limite di proporzionalità ovvero fino a che valore di carico il materiale ha un comportamento lineare.



E' anche possibile fare delle prove di trazioni cicliche con il valore massimo che aumenta. Esistono due regioni molto diverse:

- una regione in cui se scarico o carico descrivo sempre la stessa curva → regime elastico,
- una regione in cui se scarico o carico descrivo due curve molto diverse → regime inelastico.



Esiste un punto detto limite elastico in cui si ha la transizione tra comportamento elastico e inelastico.

Il vetro è detto materiale fragile → non ha riserve inelastiche.

L'acciaio è detto materiale duttile → ha riserve inelastiche.

E' ora necessario creare un modello costitutivo (o legame costitutivo) cioè un'equazione che descrive il comportamento del materiale. In questo corso trascuriamo completamente il regime inelastico.

Il tratto elastico è il tratto in cui la curva di carico e scarico coincidono quindi è caratterizzato da una relazione biunivoca → si utilizza una funzione che lega σ e ϵ :

$$\sigma = \sigma(\epsilon)$$

Nel caso più semplice,

$$\sigma = E\epsilon$$

PROVE DI TRAZIONE

Per poter caratterizzare un materiale si può usare la prova di trazione; l'obiettivo è quello di diagrammare il comportamento del materiale. Data una curva stress-strain, si possono individuare diversi comportamenti del materiale, come il regime elastico e quello inelastico.

Nel comportamento elastico si distinguono un comportamento elastico lineare e un comportamento elastico non lineare.

Noi siamo interessati a capire come si comportano i diversi materiali e a trasferire le evidenze sperimentali in un modello → scrivere un'equazione:

$$\sigma = \sigma(\epsilon) \quad \sigma = \bar{\sigma}(\epsilon)$$

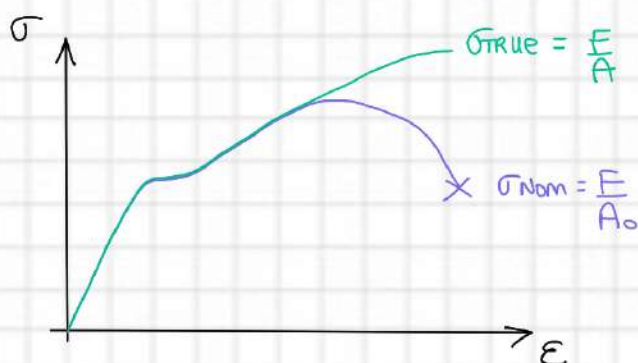
E: modulo elastico (di Young) → rappresenta la pendenza del tratto elastico lineare. Un modello con E elevato (molto pendente) è un materiale molto rigido.

Material	E in MPa
Steel	$2,1 \cdot 10^5$
Aluminium	$0,7 \cdot 10^5$
Concrete	$0,3 \cdot 10^5$
Wood (in fibre direction)	0,7... $2,0 \cdot 10^4$
Cast iron	$1,0 \cdot 10^5$
Copper	$1,2 \cdot 10^5$
Brass	$1,0 \cdot 10^5$



Sottoponendo un provino cilindrico a una prova di trazione, quando esso sta collassando, si ha una localizzazione delle deformazioni → cambia molto la sezione.

A questo punto ci si chiede se il diagramma stress-strain va fatto con la sezione iniziale o quella finale. Si hanno comportamenti molto differenti:

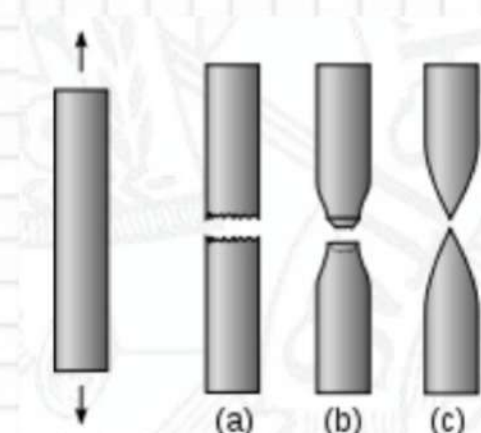


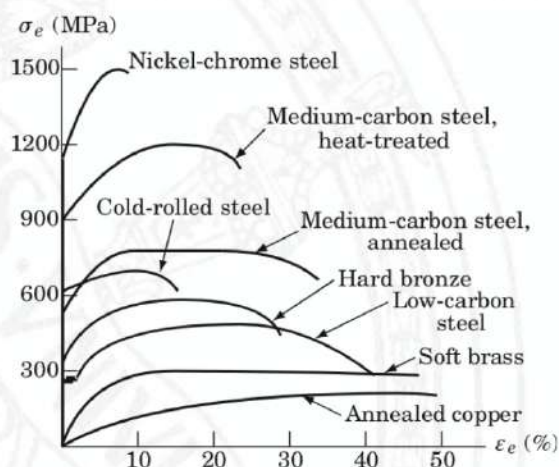
tensione vera

tensione nominale (curva ingegneristica)

Gesso e vetro hanno un comportamento elastico e poi si rompono all'improvviso (comportamento fragile) → la sezione iniziale e quella finale sono molto simili.

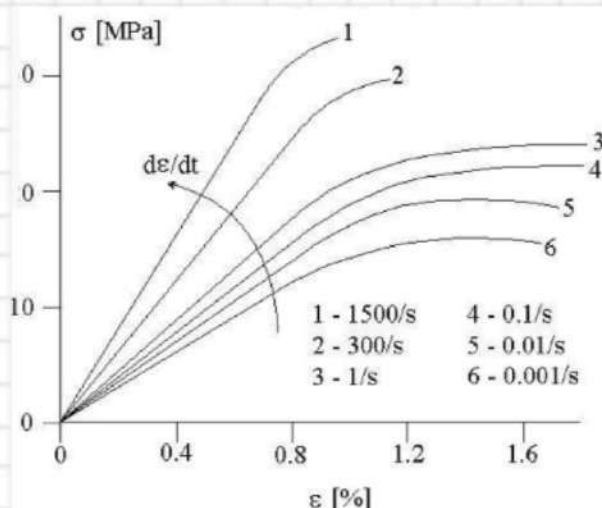
Un metallo ha un comportamento elastico-plastico-duttile, riesce a deformarsi molto → ha l'effetto di strizione.





In figura è rappresentato il comportamento di diversi metalli. I più duttili sono quelli che stanno in basso.

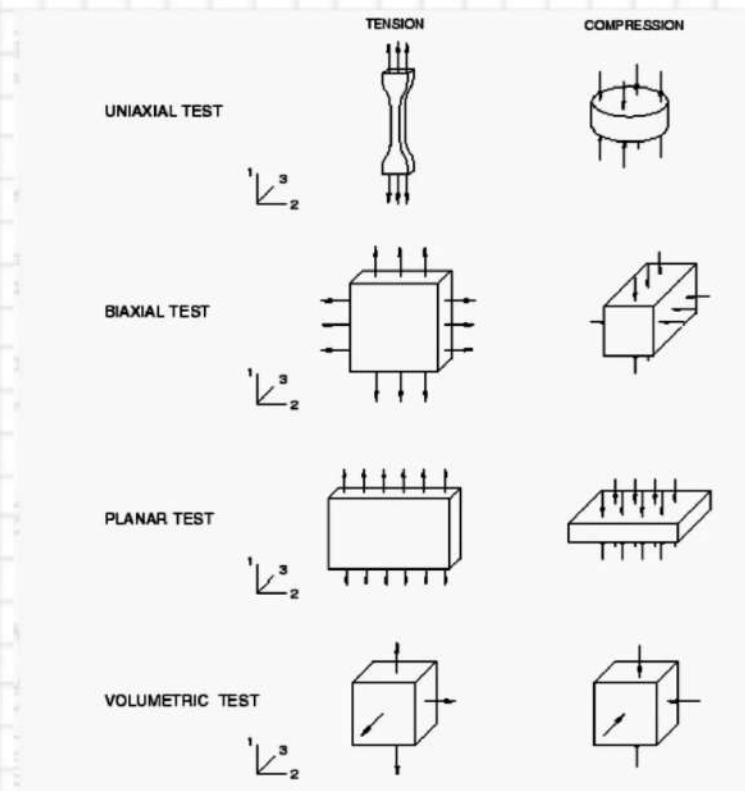
Un'altra caratteristica che hanno i materiali è la viscosità → la risposta dei materiali dipende dalla velocità di carico; più velocemente applico il carico su un materiale, più il materiale ha una risposta rigida.



La prova di trazione è il primo esempio di modello di meccanica di un corpo deformabile.

- Ipotesi di cinematica: tutte le sezioni trasversali del provino si comportano in maniera uniforme.
- Ipotesi di equilibrio: lo stato tensionale della sezione trasversale è uniforme.
- Legame costitutivo: prova di trazione per ricavare l'andamento $\sigma - \epsilon$.

Esistono numerosi altri test per caratterizzare la risposta di un materiale:



MATERIALI TRADIZIONALI: METALLI E LEGHE METALLICHE

METALLI

- Buoni conduttori di elettricità e calore, non trasparenti alla luce.
- Più utilizzato: ferro, in quanto base per l'acciaio.
- Altri metalli utilizzati: alluminio, rame, titanio, ...

LEGHE METALLICHE

Costituite da uno o più metalli con aggiunta di elementi metallici o non metallici (boro, carbonio, magnesio, rame, cromo, nickel, etc.). A seconda di quantità e combinazione degli elementi cambiano le caratteristiche della lega, migliorandone resistenza a sollecitazioni meccaniche, alte temperature, corrosione, duttilità:

Ferro: $\sigma_y = 60 \text{ MPa}$

Ferro + carbonio : $\sigma_y = 300 \text{ MPa}$

Ferro + carbonio + altri elementi : $\sigma_y = 600 \text{ MPa}$

Ferro + carbonio + altri elementi + trattamenti: $\sigma_y = 1000 \text{ MPa}$

I trattamenti possono essere termici o meccanici (tempra, estrusione, trafilatura, etc.)

CARATTERISTICHE DI ALCUNI METALLI E LEGHE A BASE DI FERRO

Materiale	ρ [kg/m ³]	E [GPa]	σ_y [MPa]	σ_R [MPa]	ϵ_R [%]	ν [-]	α [°C ⁻¹ 10 ⁻⁶]
Ferro	7870	207	130	260	45	0.29	11.8
Acciaio basso % C	7860	207	295	395	37	0.3	11.7
Acciaio medio % C	7850	207	350	520	30	0.3	11.3
Acciaio alto % C	7840	207	380	615	25	0.3	11.0
Acciaio inos. ferritico	7500	200	345	552	20	0.3	10.4
Acciaio inos. austenitico	8000	193	207	552	60	0.3	16.0
Acciaio inos. martensitico	7800	200	275	483	30	0.3	9.9

CARATTERISTICHE DI METALLI NON FERROSI

Materiale	ρ [kg/m ³]	E [GPa]	σ_y [MPa]	σ_R [MPa]	ϵ_R [%]	ν [-]	α [°C ⁻¹ 10 ⁻⁶]
Alluminio (> 99.5 %)	2710	69	17	55	25	0.33	23.6
Alluminio lega	2800	72	97	186	18	0.33	22.5
Rame (> 99.5 %)	8940	110	69	220	45	0.35	16.5
Ottone (70Cu-30Zn)	8530	110	75	303	68	0.35	20.0
Bronzo (92Cu-8Sn)	8800	110	152	380	70	0.35	18.2
Nickel (> 99.5 %)	8900	207	138	483	40	0.31	13.3
Argento (> 99.5 %)	10490	76	55	125	48	0.37	19.0
Titanio (> 99.5 %)	7500	107	240	330	30	0.34	9.0

ρ : massa volumetrica

σ_y : tensione di snervamento

ϵ_y : deformazione a rottura

α : coefficiente di dilatazione termica

E : modulo di elasticità

σ_R : tensione di rottura

ν : modulo di Poisson

MATERIALI TRADIZIONALI: POLIMERI

Materiali con struttura costituita da lunghe catene molecolari; sono utilizzati negli impieghi ingegneristici:

- termoplastici: se riscaldati si ammorbidiscono e fondono, ma se raffreddati tornano alle condizioni iniziali,
- termoindurenti: se riscaldati al di sopra di opportune temperature, subiscono modificazioni chimiche e non tornano più alle condizioni iniziali,
- elastomeri: (gomma naturale) comportamento gommoso e possibilità di deformarsi anche del 100%-200%.

Generalmente, sono ottenuti per sintesi chimica da prodotti del petrolio. La forma finale può essere anche molto complessa, e viene realizzata attraverso una o più operazioni. Sono caratterizzati da una elevata flessibilità con grandi deformazioni elastiche. Hanno lo stesso rapporto resistenza/peso dei metalli; peso però decisamente inferiore:

$$\rho_{POL} \approx \rho_{H_2O} = 1 \left[\frac{g}{cm^3} \right] \quad \rho_{AL} = 2,7 \left[\frac{g}{cm^3} \right] \quad \rho_{ACC} = 7,9 \left[\frac{g}{cm^3} \right]$$

Hanno un'ottima resistenza alla corrosione.

I fenomeni viscosi si manifestano anche a temperatura ambiente, proprietà fortemente influenzate dalla temperatura e dalla velocità di carico.

Le proprietà meccaniche sono caratterizzate sempre dagli stessi parametri usati per i metalli (modulo elastico, sollecitazione di rottura statica e a fatica, etc.). Il campo di variazione dei parametri è però molto più esteso che nei metalli.

I polimeri con stessa composizione chimica possono avere catene molecolari di lunghezza diversa (ad esempio per trattamenti termici) e quindi caratteristiche diverse. Sono inoltre caratterizzati da una notevole variabilità dei dati disponibili in letteratura.

CARATTERISTICHE DI ALCUNI POLIMERI

Polimero	Stato	ρ [kg/m ³]	E [GPa]	σ_R [MPa]	ϵ_R [%]	T_g [°C]	T_{max} [°C]	α [°C ⁻¹ 10 ⁻⁶]
Polietilene	Alta densità 70-80% cristallino	952-965	1.07-1.09	22-31	10-1200	-90	130-137	60-110
	Bassa densità 40-50% cristallino	917-932	0.17-0.28	8.3-31	100-650	-110	98-115	100-220

ρ : massa volumetrica
 E : modulo di elasticità
 σ_R : tensione di rottura
 ϵ_R : deformazione a rottura

T_g : temperatura di transizione vetrosa
 T_{max} : temperatura massima
 k : conduttività termica

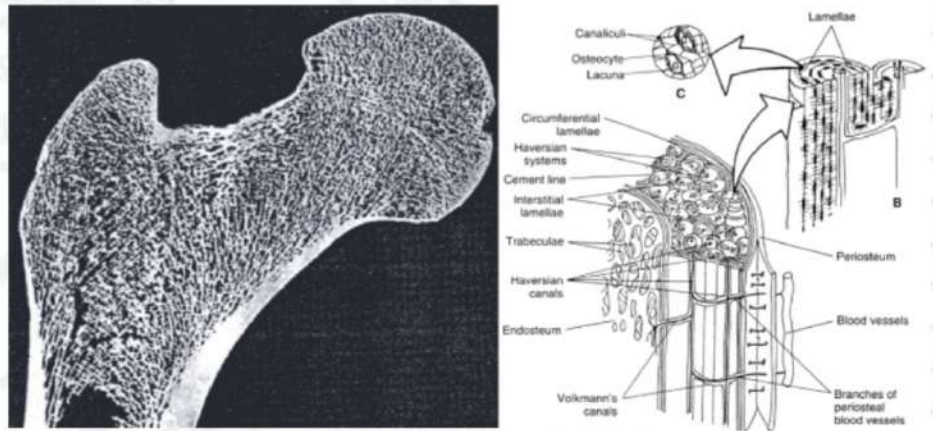
MATERIALI BIOLOGICI

Noi siamo interessati a due tipi di materiali:

- artificiali, usati per le protesi,
- biologici.

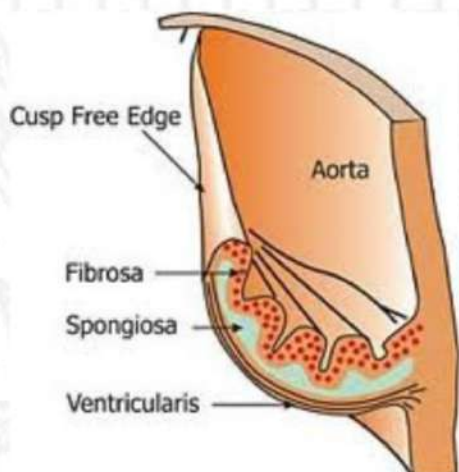
I materiali biologici sono molto complessi dato che sono materiali vivi e sono tutti diversi tra loro. Ad esempio, se prendo due campioni di aorta dello stesso maiale, essi sono diversi; se prendo due sezioni di aorta nello stesso punto da due maiali dello stesso allevamento e che hanno mangiato le stesse cose, essi sono diversi.

La geometria del materiale biologico è molto complesso, inoltre la sua composizione non è omogenea, è diversa in ogni punto.



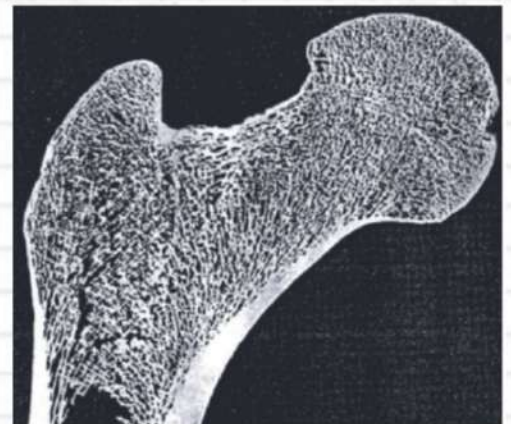
Si parla di:

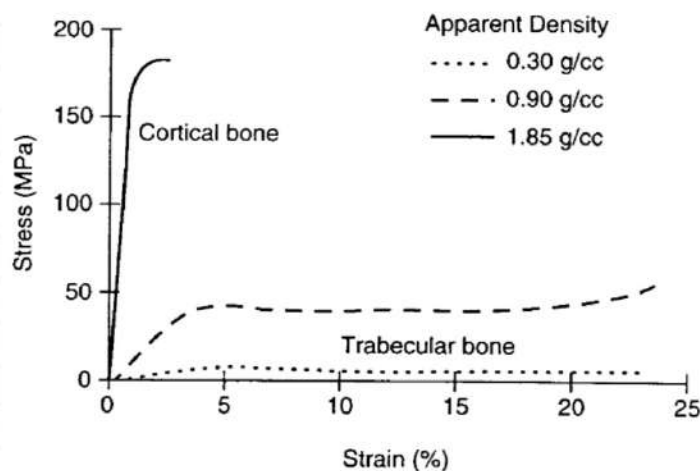
- materiali isotropi: quando la sua risposta meccanica non dipende dalla direzione lungo la quale lo tiro,
- materiali anisotropi: quando la sua risposta meccanica dipende dalla direzione lungo la quale lo tiro,
- corpo omogeneo: quando le proprietà del corpo sono costanti.



Le valvole hanno una struttura molto complessa e sono anche composte da materiali differenti.

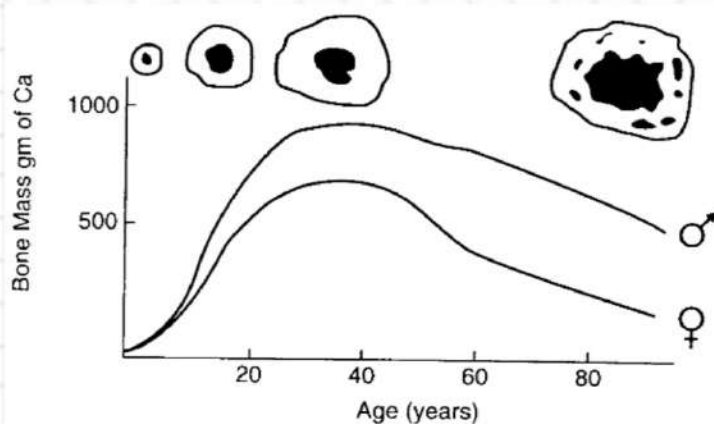
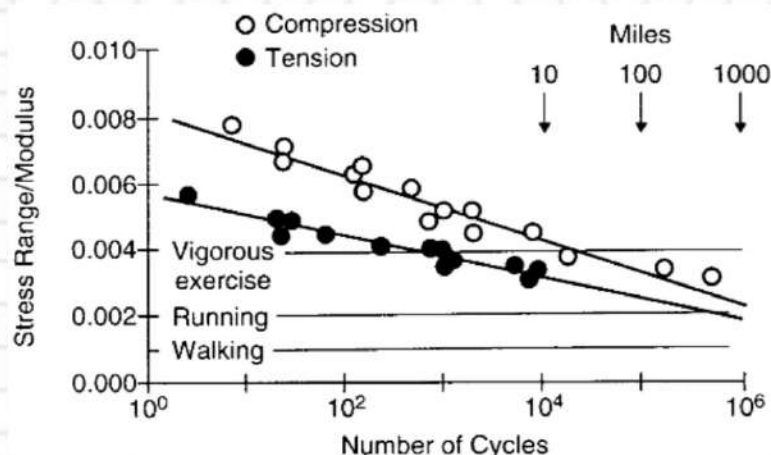
La testa del femore è composta da una zona più densa (tessuto corticale) e una più rada (tessuto spugnoso o trabecolare). Quest'ultimo possiede comportamenti molto diversi a trazione e compressione.





Il grafico evidenzia la differenza della risposta alla compressione in un tessuto corticale e in quello trabecolare.

Si parla di fatica di un materiale quando viene caricato molte volte ciclicamente; tutti i materiali biologici sono caricati ciclicamente.



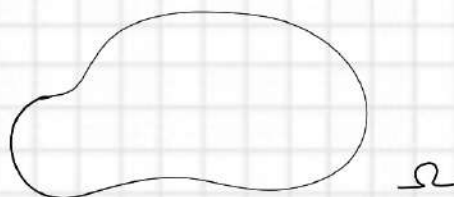
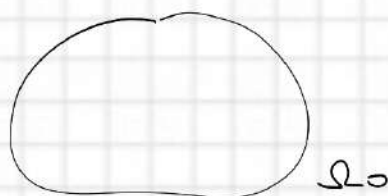
Inoltre il tessuti duri, come le ossa, sono soggetti a erosione con l'età che avanza.

CORPO DEFORMABILE

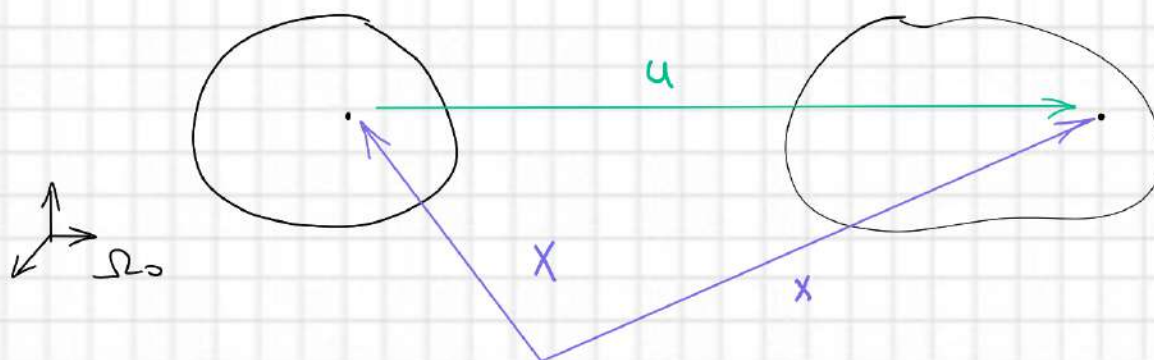
Tratteremo di corpi 3D. Un corpo è deformabile se, nel momento in cui tiro il corpo, la distanza tra due punti varia.

ANALISI CINEMATICA

Si parla di configurazione iniziale (o di riferimento), indicata con Ω_0 , e di configurazione attuale, indicata con Ω .



Si utilizza un approccio lagrangiano ovvero per il quale ci si concentra sulle parti di materiale. In pratica si guarda dove finisce un determinato punto materiale dopo che è passato un certo tempo t .



X : vettore posizione iniziale
 x : vettore posizione attuale
 $u = x - X$: vettore spostamento

$\left. \begin{array}{l} X: \text{vettore posizione iniziale} \\ x: \text{vettore posizione attuale} \end{array} \right\}$ si riferiscono allo stesso punto materiale

X , x e u sono detti campi vettoriali.

u è una funzione vettoriale, ovvero una funzione che prende un generico punto P di Ω_0 e gli associa un vettore:

$$u: P \in \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

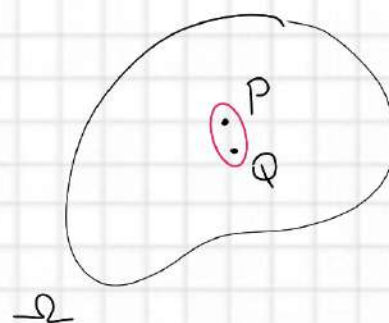
Per studiare la cinematica, quindi, ci concentreremo su un generico punto P e considereremo anche un intorno elementare di P . Per intorno elementare si intende una regione attorno a P molto piccola:

$$u = u(P) + \frac{du}{dx} dx$$

Se Q appartiene all'intorno elementare di P , posso scrivere:

$$u(Q) = u(P) + \frac{du}{dx}(P)(Q - P)$$

trascurando i termini di ordine superiore.



TENSORE DEL II ORDINE

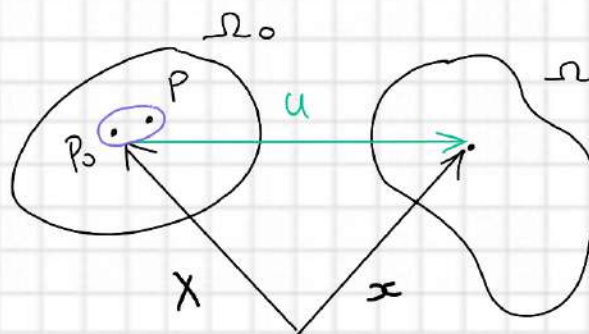
Definiamo il campo spostamento u come:

$$\mathbf{x}(P) = \mathbf{x}(P_0) + \mathbf{u}(P)$$

Riprendiamo il concetto di intorno elementare:

$$\mathbf{u}(P) = \mathbf{u}(P_0) + \underbrace{\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}}}_{\mathbf{H}} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) d\mathbf{x}$$

$$= \mathbf{u}(P_0) + \mathbf{H} d\mathbf{x}$$



$\mathbf{H}$: TENSORE del II ORDINE e CAMPO TENSORIALE

$$\mathbf{H} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}}$$

Dato un tensore $\mathbf{A}$ è possibile scrivere:

$$\mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{A}^S}_{\text{matrice simmetrica}} + \underbrace{\mathbf{A}^E}_{\text{matrice emisimmetrica}}$$

$$(\mathbf{A}^S)^T = \mathbf{A}^S$$

$$(\mathbf{A}^E)^T = -\mathbf{A}^E$$

TEOREMA

$$\mathbf{A}^S = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \quad \text{tensore simmetrico}$$

$$\mathbf{A}^E = \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) \quad \text{tensore emisimmetrico}$$

Posso scrivere:

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{W}$$

$$\bullet \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) \quad \text{tensore simmetrico del II ordine}$$

$$\bullet \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} - \mathbf{H}^T) \quad \text{tensore emisimmetrico del II ordine}$$

$$\Rightarrow \mathbf{u}(P) = \mathbf{u}(P_0) + \mathbf{H} d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{u}(P) = \mathbf{u}(P_0) + \mathbf{W} d\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{x}$$

Se introduco l'ipotesi di piccoli spostamenti possiamo dare un significato fisico ai termini:

$$\left\| \frac{\mathbf{u}}{L} \right\| \ll 1$$

$\Rightarrow u(P_0) + W dx$ contributo di moto rigido (traslazione e rotazione rigida)

ϵdx contributo puramente deformativo

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{1}{2} (H + H^T) = \frac{1}{2} [\nabla_x u + (\nabla_x u)^T]$$

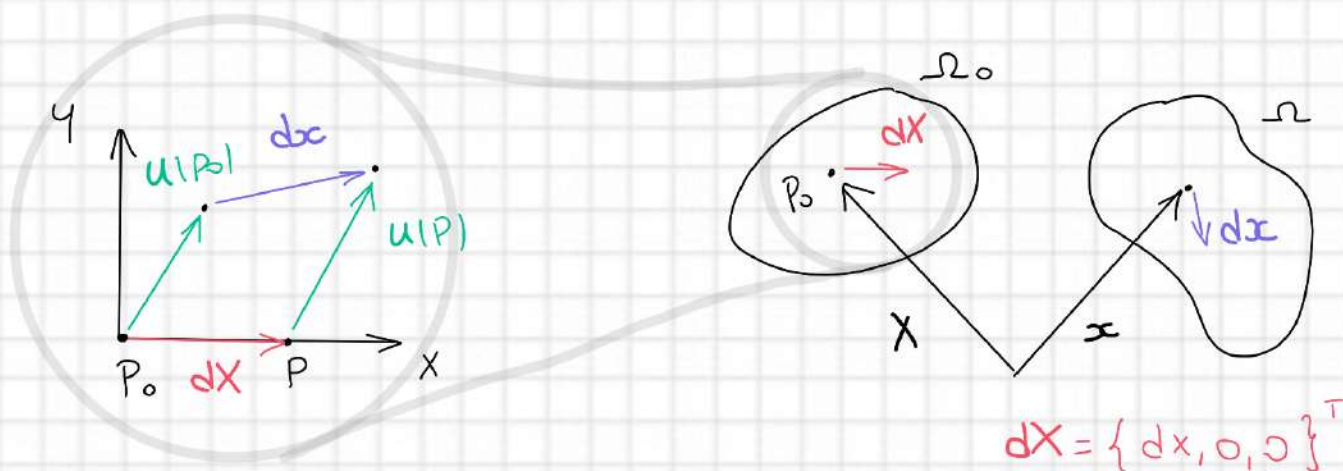
ϵ contiene tutte le informazioni dello stato deformativo dell'intorno elementare e prende il nome di tensore delle deformazioni:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{22} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \text{simmetrico}$$

Spesso viene rappresentato come:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Le componenti di ϵ hanno un chiaro significato fisico. Consideriamo un vettore dX ; indichiamo con dx l'elemento trasformato durante il cambio di configurazione:



$$u(P) = u(P_0) + W dx + \epsilon dx$$

$$\quad \quad \quad = u(P_0) + \epsilon dx$$

considero $W = 0$

$$dx = P - P_0$$

$$dx = P' - P_0' = [u(P) + dx] - u(P_0)$$

Faccio lo sviluppo in serie di Taylor:

$$dx = u(P_0) + \nabla_x u dx + dx - u(P_0)$$

$$\stackrel{!}{=} dx + \varepsilon dx \quad \rightarrow \text{nel gradiente ho trascurato la parte emisimmetrica (mi interessa } \varepsilon)$$

$$dx = \begin{Bmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dx + \varepsilon_{xx} dx \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} dx \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} dx \end{Bmatrix}$$

Calcoliamo l'allungamento relativo (variazione di lunghezza relativa) del vettore dx

$$\varepsilon_x = \frac{\|dx\| - \|dx\|}{\|dx\|} \quad \rightarrow \text{allungamento relativo della fibra // all'asse } x$$

Calcoliamo la norma di dx :

$$\|dx\| = \sqrt{(1 + \varepsilon_{xx})^2 + \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \gamma_{xz}\right)^2} dx$$

↳ lunghezza del vettore nel cambio di configurazione

$$\|dx\| = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx} + \cancel{\varepsilon_{xx}^2} + \cancel{\frac{1}{4} \gamma_{xy}^2} + \cancel{\frac{1}{4} \gamma_{xz}^2}} dx \quad \text{hp piccoli spostamenti}$$

$$\simeq \sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}} dx$$

Faccio lo sviluppo in serie di Taylor trascurando i termini di ordine superiore:

$$\|dx\| = (1 + \varepsilon_{xx}) dx$$

$$\Rightarrow \varepsilon_x = \frac{(1 + \varepsilon_{xx}) dx - dx}{dx}$$

$$\stackrel{!}{=} \cancel{1 + \varepsilon_{xx}} - \cancel{1}$$

$\Rightarrow$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xx}$$

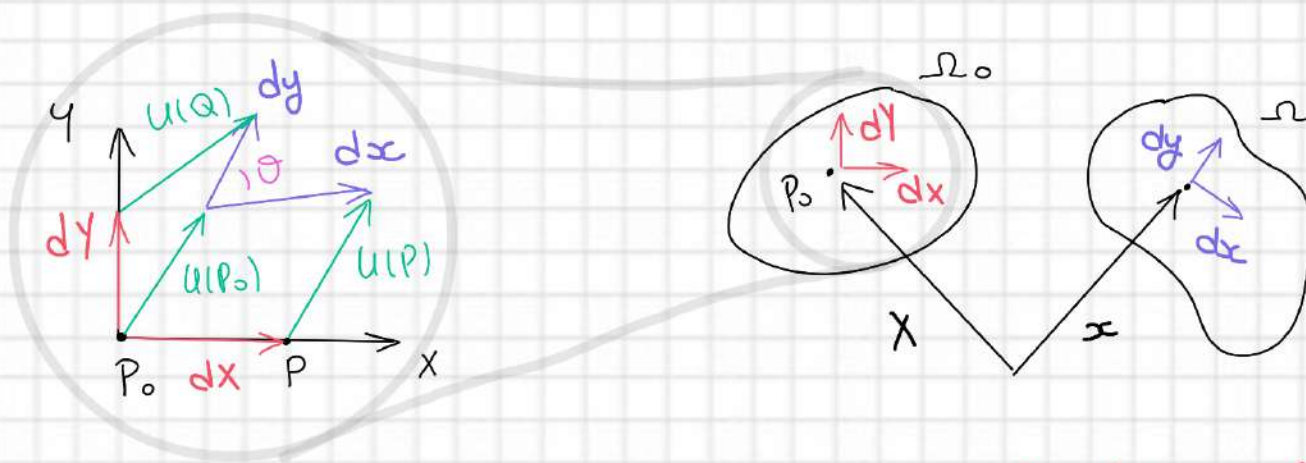
$\rightarrow$ interpretazione fisica di ε_{xx}

è l'allungamento di una fibra di materiale // all'asse x

ε_{yy} $\rightarrow$ allungamento di una fibra di materiale // all'asse y

ε_{zz} $\rightarrow$ allungamento di una fibra di materiale // all'asse z

γ_{xy} $\rightarrow$ variazione di angolo tra $d\mathbf{x}$ e $d\mathbf{y}$



$$dx = dX + \varepsilon dX = \begin{pmatrix} (1 + \varepsilon_{xx}) dX \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} dX \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} dX \end{pmatrix}$$

$$dy = dY + \varepsilon dY = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \gamma_{xy} dY \\ (1 + \varepsilon_{yy}) dY \\ \frac{1}{2} \gamma_{yz} dY \end{pmatrix}$$

$$d\mathbf{X} = \{dx, 0, 0\}^T$$

$$d\mathbf{Y} = \{0, dy, 0\}^T$$

$$\cos \theta = \frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y}}{\|d\mathbf{x}\| \|d\mathbf{y}\|} \approx \gamma_{xy}$$

RICORDA

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos(\theta, \mathbf{b})$$

Chiamo γ_{xy} la variazione di angolo tra $d\mathbf{x}$ e $d\mathbf{y}$:

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \theta \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$$

Ricordando l'ipotesi di piccoli spostamenti,

$$\cos \theta = \cos \left(\gamma_{xy} - \frac{\pi}{2} \right) = \sin(\gamma_{xy}) \approx \gamma_{xy}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta xy = \delta x y}$$

→ rappresenta la variazione di angolo tra una fibra di materiale // all'asse x e una fibra di materiale // all'asse y

δxz → variazione di angolo tra una fibra di materiale // all'asse x e una fibra di materiale // all'asse z

δyz → variazione di angolo tra una fibra di materiale // all'asse y e una fibra di materiale // all'asse z

ES:

$$\varepsilon(P_0) = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da questi numeri si deduce che le fibre // y e quelle // z non si allungano; quelle // x sì. Se prendo due vettori, uno // x e uno // y l'angolo diminuisce; inoltre la variazione di angolo tra x e z è positiva ⇒ l'angolo aumenta.

In generale, per capire in quale direzione si allunga di più si guardano i termini $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$.

Ora vogliamo capire se esistono direzioni lungo le quali si hanno solo dilatazioni e non scorrimenti angolari, ovvero una direzione dX dell'intorno elementare del punto tale che:

$$d\mathcal{X} = dX + \lambda dX$$

Ricordando che:

$$d\mathcal{X} = dX + \varepsilon dX$$

Si ottiene:

$$\varepsilon dX = \lambda dX$$

$$dX \neq 0$$

$$(\varepsilon - \lambda I) dX = 0$$

$$\det(\varepsilon - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - \lambda & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - \lambda & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

I_1, I_2, I_3 sono detti invarianti per il tensore delle deformazioni, i loro valori non cambiano variando il SR.

$$I_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \det(\varepsilon)$$

STATO PIANO DI DEFORMAZIONE

Quando tutte le componenti caratterizzate da un certo indice sono nulle:

$$\varepsilon_{ij} = 0 \quad \forall j \Rightarrow \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0$$

Nella realtà si hanno quando il campo degli spostamenti è funzione solo di x e $y \rightarrow u(x,y)$; **ES**: struttura infinitamente lunga, dotata di un piano di simmetria, caricata in modo simmetrico rispetto al piano di simmetria.

EQUILIBRIO DI UN CORPO DEFORMABILE

Concentriamo l'attenzione sul corpo nella configurazione attuale Ω .

Dobbiamo capire quali sono le azioni che agiscono sul corpo. La definizione delle azioni fa già parte delle ipotesi del modello.

Esistono:

- forze (per unità) di volume $\mathbf{b}$ [Fl^{-3}] in Ω
- forze (per unità) di superficie $\mathbf{t}$ [Fl^{-2}] in $\partial\Omega$

Capite le azioni, posso dare la definizione di equilibrio:

$$\begin{cases} \mathbf{R}(\mathcal{P}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}(\mathcal{P}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad \forall \mathcal{P} \subseteq \Omega$$

Prendo una generica porzione di corpo $\mathcal{P}$ e devo verificare l'equilibrio per ogni porzione di Ω .

In generale, si può scrivere l'equilibrio attraverso l'integrale:

$$\mathbf{R}(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{t}_n \, dA = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b} \times \underbrace{\mathbf{x}}_{\text{DISTANZA}} \, dV + \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{t}_n \times \mathbf{x} \, dA = \mathbf{0}$$

$\mathbf{t}_n$ è forza superficiale che agisce su $\mathcal{P}$ attraverso $d\mathcal{P} \rightarrow$ forze che agiscono su $\mathcal{P}$ dalla parte restante di Ω .

TEOREMI DI CAUCHY

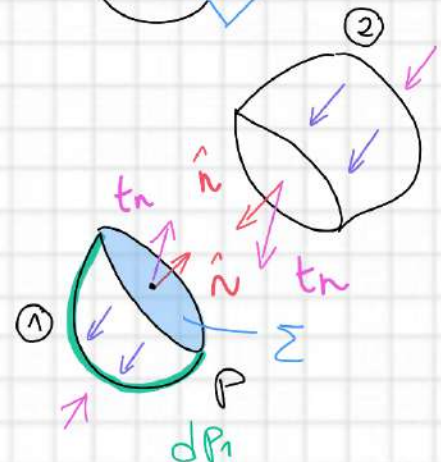
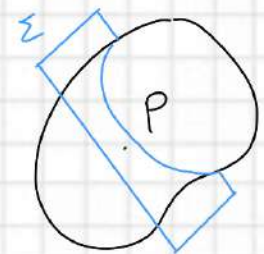
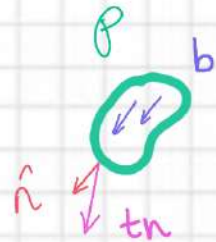
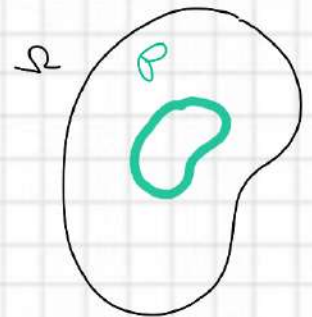
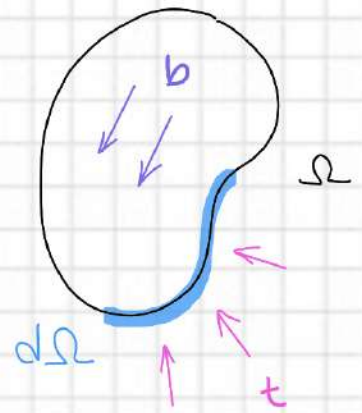
TEOREMA 1

Dato un corpo Ω in equilibrio e un punto P , una superficie Σ che passa per P taglia il corpo a metà. Sul corpo agiscono forze di volume e di superficie. Se Ω è in equilibrio allora anche $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ sono in equilibrio.

$$\mathbf{R}(\mathcal{P}_1) = \mathbf{0} \quad \int_{\mathcal{P}_1} \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\mathcal{P}_1} \mathbf{t} \, dA + \int_{\Sigma} \mathbf{t}_n \, dA = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}(\mathcal{P}_2) = \mathbf{0} \quad \int_{\mathcal{P}_2} \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\mathcal{P}_2} \mathbf{t} \, dA + \int_{\Sigma} \mathbf{t}_{-n} \, dA = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2} \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\mathcal{P}_1 \cup \partial\mathcal{P}_2} \mathbf{t} \, dA}_{= \mathbf{R}(\Omega) = \mathbf{0}} + \int_{\Sigma} (\mathbf{t}_n + \mathbf{t}_{-n}) \, dA = \mathbf{0}$$



$$\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 = \Omega$$

$$\partial\mathcal{P}_1 \cup \partial\mathcal{P}_2 = \partial\Omega$$

$$\int_{\Sigma} (t_n + t_{-n}) dA = 0$$

Se considero un'altra superficie Σ' che passa per lo stesso punto e che abbia la stessa normale, trovo la stessa equazione $\Rightarrow$ l'equazione è indipendente dalla superficie

$$\Rightarrow t_n + t_{-n} = 0 \Rightarrow \underbrace{t_n}_{\substack{\text{azione che agisce sulla porzione } P_1 \\ \text{attraverso il punto } P \text{ indotta da } P_2}} = - \underbrace{t_{-n}}_{\substack{\text{azione che agisce sulla porzione } P_2 \\ \text{attraverso il punto } P \text{ indotta da } P_1}} \rightarrow \text{principio di azione e reazione}$$

Quindi le azioni interne che parti diverse si scambiano sono forze superficiali; tali forze abbiamo ipotizzato che dipendono dalla normale uscente.

TEOREMA 2

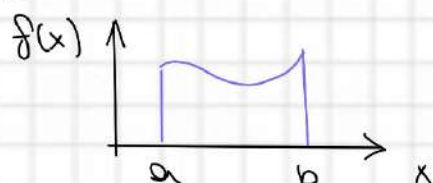
Consideriamo un corpo Ω in equilibrio e un punto P all'interno del corpo con SR incentrato in P . Si considera poi un tetraedro con tre delle facce che coincidono con gli assi del SR. Considero τ una porzione di Ω .

$$\Rightarrow R(\tau) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\tau} b dV + \sum_{i=1}^3 \int_{A_i} t \cdot e_i dA_i + \int_{A_n} t_n dA_n = 0$$

$\underbrace{\quad}_{\text{faccia coordinata}}$

Applico il teorema della media:



$$\int_a^b f(x) dx = \langle f \rangle (b-a)$$

$$\Rightarrow \langle b \rangle V + \sum_{i=1}^3 \langle t \cdot e_i \rangle A_i + \langle t_n \rangle A_n = 0$$

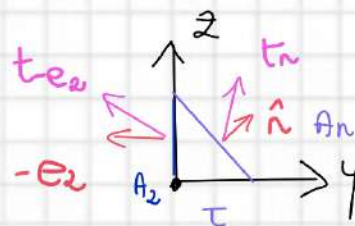
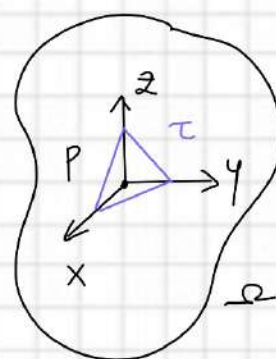
$\hookrightarrow$ dimensione del dominio di integrazione

$$\Rightarrow \langle b \rangle \frac{V}{A_n} - \sum_{i=1}^3 \langle t e_i \rangle \frac{A_i}{A_n} + \langle t_n \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle b \rangle \frac{V}{A_n} - \sum_{i=1}^3 \langle t e_i \rangle n \cdot e_i + \langle t_n \rangle = 0$$

$$A_i = A_n \cdot n \cdot e_i$$

Relazione geometrica che dice che le superfici A_i sono le proiezioni A_n sui piani coordinati attraverso le componenti del vettore n .



Faccio tendere il tetraedro a 0 in maniera omotetica:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \langle b \rangle \frac{V}{A n} - \sum_{i=1}^3 \langle t_{ei} \rangle n \cdot e_i + \langle t_{nn} \rangle = t_n - \sum_{i=1}^3 t_{ei} n \cdot e_i = 0$$

$$\Rightarrow t_n = \sum_i t_{ei} (n \cdot e_i) \rightarrow \text{forza superficiale che due parti diverse di corpo si scambiano attraverso una superficie che passa per P con normale uscente.}$$

TENSORE DELLE TENSIONI

Posso anche scrivere:

$$t_n = \left[\sum_i t_{ei} \otimes e_i \right] n$$

O anche:

$$t_n = \sigma \cdot n$$

$$\sigma = \sum_i t_{ei} \otimes e_i \quad \text{tensore delle tensioni}$$

Se conosco t_{e1}, t_{e2}, t_{e3} allora conosco σ e t_n .

Ora vogliamo studiare le componenti di σ e vogliamo capire se tali componenti hanno un significato fisico.

NOTAZIONE COMPATTA σ

NOTAZIONE INDICIALE σ_{ij}

NOTAZIONE INGEGNERISTICA

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

N.B. il tensore non l'abbiamo scritto in maniera non è simmetrica (scopriremo che lo è).

$$\sigma = \sum_i t_{ei} \otimes e_i$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ab} &= \left[\left(\sum_i t_{ei} \otimes e_i \right) e_b \right] e_a \\ &= \left[\sum_i t_{ei} \underbrace{(e_i \cdot e_b)}_{\text{dib}} \right] e_a \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{teb}} \end{aligned}$$

Ricorda

$$A_{eb} = A e_b \cdot e_a$$

$$\sigma_{ab} = t_{eb} \cdot e_a$$

σ_{11} → prima componente del vettore t_{e_1}

σ_{21} → seconda componente del vettore t_{e_1}

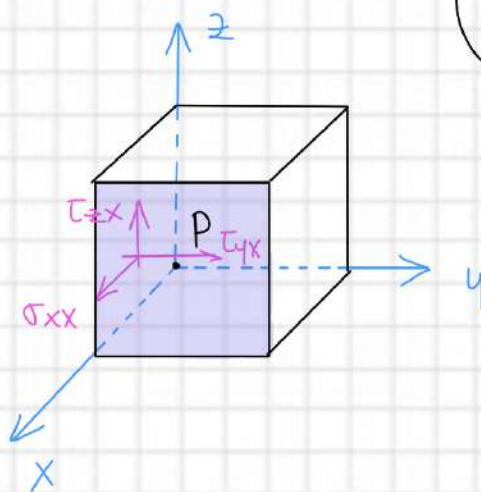
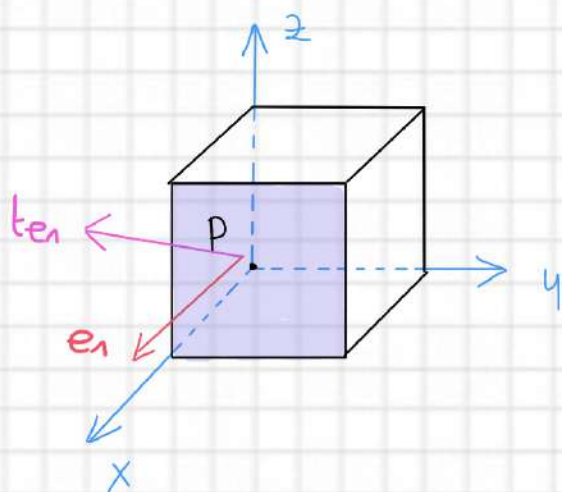
σ_{31} → terza componente del vettore t_{e_1}

$$\Rightarrow [\sigma] = \begin{bmatrix} t_{e_1} & t_{e_2} & t_{e_3} \end{bmatrix}$$

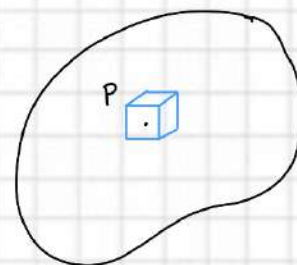
Il significato fisico del tensore delle tensioni lo capisco per colonne: rappresentano le componenti dei vettori forze superficiali che agiscono sui piani coordinati.

Ora invece di considerare un tetraedro considero un cubetto intono a P.

Vediamo le componenti del vettore t_n .



componenti di t_{e_1}



Rivediamo le equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} R(P) = 0 \\ M(P) = 0 \end{cases} \quad \forall P$$

Queste sono scritte in forma integrale, voglio scriverle in forma differenziale (o puntuale).

$$\begin{aligned} R(P) &= \int_P b \, dV + \int_{\partial P} t_n \, dA = 0 \\ &= \int_P b \, dV + \int_{\partial P} \sigma \cdot n \, dA = 0 \\ &= \int_P b \, dV + \int_P \operatorname{div} \sigma \, dV = 0 \\ &= \int_P (b + \operatorname{div} \sigma) \, dV = 0 \quad \forall P \subseteq \Omega \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \sigma + b = 0 \quad \text{in } P \in \Omega$$

NOTAZIONE COMPATTA

$$\operatorname{div} \sigma + b = 0$$

NOTAZIONE INDICIALE

$$\sigma_{i,j,j} + b_i = 0$$

, : derivazione

j: indice ripetuto (sommatoria sottintesa)

i: indice libero

NOTAZIONE INGEGNERISTICA

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma_{xx}}{dx} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{d\sigma_{yy}}{dy} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{d\sigma_{zz}}{dz} + b_z = 0 \end{array} \right.$$

Per quanto riguarda la seconda equazione di equilibrio si ottiene:

$$M(P) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sigma^T$$

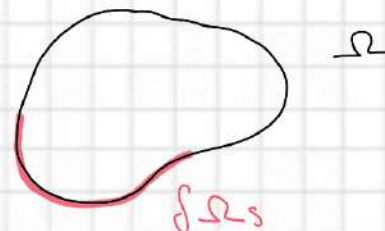
PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Riprendiamo le equazioni viste fino ad ora:

CINEMATICA (u, ε)

$$\varepsilon = \nabla^s u \quad \text{in } \Omega \quad \text{equazioni di campo}$$

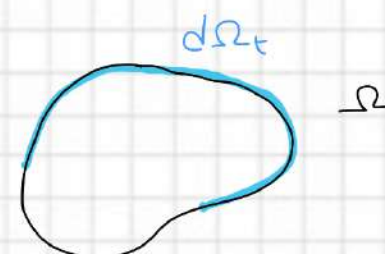
$$u = \bar{u} \quad \text{in } \partial\Omega_s \quad \text{equazioni al bordo}$$



EQUILIBRIO (b, t, σ)

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \sigma + b &= 0 \\ \sigma &= \sigma^T \end{aligned} \right\} \quad \text{in } \Omega$$

$$\sigma n = t \quad \text{in } \delta\Omega_t$$



Questi sono due mondi staccati ma sono uno il complementare dell'altro; le ipotesi che abbiamo fatto nello sviluppare la teoria di uno dei due mondi implica delle conseguenze delle ipotesi sull'altro mondo.

Il principio dei lavori virtuali (PLV) serve proprio per collegare i due mondi.

Si prendono in considerazione lavori virtuali esterni ed interni:

$$\mathcal{L}^e = \int_{\Omega} b \cdot u \, dV + \int_{\delta\Omega_t} t \cdot u \, dA + \int_{\delta\Omega_s} \sigma n \cdot \bar{u} \, dA$$

- si parla di lavori virtuali dato che b, t e σ appartengono al mondo dell'equilibrio mentre u a quello della cinematica;
- si parla di lavoro dato che dimensionalmente si ha $[F \cdot l]$;
- si parla di lavoro esterno dato che le quantità in gioco sono esterne (b è la forza di volume applicata sul mio corpo, u è lo spostamento esterno applicato sul corpo).

$$\mathcal{L}^i = \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon \, dV \quad : \text{ è la doppia contrazione } \longrightarrow A:B = A_{ij} B_{ij} = A_{11} B_{11} + A_{22} B_{22} + A_{33} B_{33} + A_{12} B_{12} + A_{13} B_{13} + A_{23} B_{23} + A_{21} B_{21} + A_{31} B_{31} + A_{32} B_{32}$$

- si parla di lavori virtuali perché σ e ε appartengono a due mondi diversi.

PRINCIPIO DEGLI SPOSTAMENTI VIRTUALI

HP:

se

$$\mathcal{L}^e = \mathcal{L}^i \quad \forall u, \varepsilon \text{ congruenti}$$

TH:

σ, b, t sono in equilibrio.

Sto scrivendo l'equilibrio.

PRINCIPIO DELLE FORZE VIRTUALI

HP:

se $\delta W_E = \delta W_i \quad \forall \sigma, b, t$ in equilibrio

TH:

u, ε congruenti.

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

HP:

se u, ε congruenti
 σ, b, t in equilibrio

TH:

$$\delta W_E = \delta W_i$$

Dimostrazione:

HP equilibrio (E) + HP congruenza (C) $\Rightarrow$ uguaglianza dei lavori (L)

Equilibrio

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \sigma + b = 0 \\ \sigma = \sigma^T \\ \sigma n = t \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{in } \Omega \\ \\ \text{in } \partial\Omega \end{array}$$

Congruenza

$$\begin{array}{ll} \varepsilon = \nabla^s u & \text{in } \Omega \\ u = \bar{u} & \text{in } d\Omega_s \end{array}$$

$$\underbrace{(\operatorname{div} \sigma + b)}_0 \cdot u = 0 \quad \forall u$$

$$\int_{\Omega} \underbrace{(\operatorname{div} \sigma + b)}_0 \cdot u \, dV = 0 \quad \forall u$$

posso scrivere:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma \cdot u \, dV + \int_{\Omega} b \cdot u \, dV = 0$$

so che:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma \cdot u \, dV = \int_{\partial\Omega} \sigma n \cdot u \, dA - \int_{\Omega} \sigma : \nabla u \, dV$$

integrazione per parti:

$$\int_0^x \underbrace{f}_{\text{DERIVATA RISP. X}} \cdot g \, dx = fg - \int f g_x \, dx$$

in notazione indiciale:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i dV = \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j u_i dA - \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j} dV$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} \sigma n \cdot u dA - \int_{\Omega} \underbrace{\sigma : \nabla u}_{= \sigma : \nabla^S u} dV + \int_{\Omega} b \cdot u dV = 0$$

GRADIENTE SIMMETRICO $(\nabla u)^S = \varepsilon$

Dimostriamo tale uguaglianza:

Se ho:

- S : tensore simmetrico
- A : tensore generale
- A^S : parte simmetrica di A
- A^E : parte emisimmetrica di A

Relazioni:

$$S : A = S : A^S$$

$$S : A^E = 0$$

$$S : A^E = S : \left[\frac{1}{2} (A - A^T) \right] = \frac{1}{2} (S : A - S : A^T) = 0$$

$$\Rightarrow S : A - S : A^T = 0$$

in notazione indiciale:

$$S_{ij} A_{ij} - S_{ij} A_{ji} = 0$$

$$S_{ij} A_{ij} - S_{ji} A_{ij} = 0$$

→ ho scritto esattamente la stessa cosa di sopra

$$(S_{ij} - S_{ji}) A_{ij} = 0$$

= 0 perché S è simmetrico

Quindi si ottiene:

$$\int_{\partial\Omega} \sigma n \cdot u dA - \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon dV + \int_{\Omega} b \cdot u dV = 0 \quad \forall u$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \sigma n \cdot u dA &= \int_{\partial\Omega_S} \sigma n \cdot \underbrace{u}_{\bar{u}} dA + \int_{\partial\Omega_t} \sigma n \cdot \underbrace{u}_{t} dA \\ &= \int_{\partial\Omega_S} \sigma n \bar{u} dA + \int_{\partial\Omega_t} t \cdot u dA \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega_S} \sigma n \cdot \bar{u} \, dA + \int_{\Omega_t} t \cdot u \, dA - \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon \, dV + \int_{\Omega} b \cdot u \, dV = 0$$

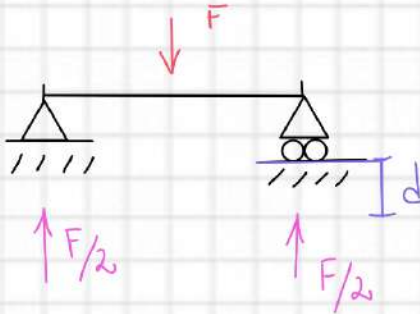
$$\Rightarrow \underbrace{\int_{\Omega} b \cdot u \, dV}_{\text{volume}} + \underbrace{\int_{\Omega_S} \sigma n \cdot \bar{u} \, dA + \int_{\Omega_t} t \cdot u \, dA}_{\text{Lve}} = \underbrace{\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon \, dV}_{\text{Lvi}}$$

lavoro virtuale esterno
fatto dalle forze di
volume

lavoro virtuale esterno
delle reazioni vincolari
per gli spostamenti
imposti ai vincoli
(cedimenti)

lavoro virtuale esterno
fatto dalle forze di
superficie

ES:



Se il vincolo in B reagisce ma cede di una certa quantità d , allora nel principio dei lavori virtuali si ha anche un lavoro fatto dalla reazione del vincolo e nel caso 3D è proprio l'integrale visto prima.

OSS:

- $L + E \Rightarrow C \rightarrow$ teorema delle forze virtuali
- $L + C \Rightarrow E \rightarrow$ teorema degli spostamenti virtuali

LEGAME COSTITUTIVO NEL CORPO DEFORMABILE 3D

Abbiamo parlato di cinematica ed equilibrio che sono due mondi slegati; abbiamo cercato di unirli formalmente attraverso il principio dei lavori virtuali ma in realtà sono ancora due mondi slegati. Ora li leghiamo attraverso i legami costitutivi.

Nel corso noi analizzeremo i legami costitutivi elastici; parleremo di legame elastico:

- alla Cauchy,
- alla Green.

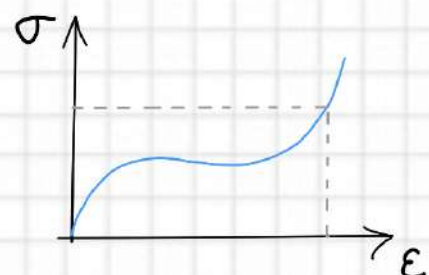
LEGAME COSTITUTIVO ELASTICO ALLA CAUCHY

Modello nel quale il tensore delle tensioni è funzione del tensore delle deformazioni o viceversa:

$$\sigma = \sigma(\varepsilon), \quad \varepsilon = \varepsilon(\sigma)$$

$$\sigma = \mathbb{C} \varepsilon \quad \text{modello lineare}$$

$\hookrightarrow$ tensore del IV ordine: mappa un tensore del II ordine in un tensore del II ordine



Notazione compatta

$$\sigma = \mathbb{C} \varepsilon$$

Notazione indiciale

$$\sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Notazione ingegneristica

$$\{\sigma\}_{6 \times 1} = [\mathbb{C}]_{6 \times 6} \{\varepsilon\}_{6 \times 1}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{xxxx} & \mathbb{C}_{xyxy} & \mathbb{C}_{xxzz} & \mathbb{C}_{xxxy} & \mathbb{C}_{xyyz} & \mathbb{C}_{xxzx} \\ \mathbb{C}_{yyxx} & \mathbb{C}_{yyyy} & \mathbb{C}_{yyzz} & \mathbb{C}_{yyxy} & \mathbb{C}_{yyyz} & \mathbb{C}_{yyzx} \\ \mathbb{C}_{zzxx} & \mathbb{C}_{zzyy} & \mathbb{C}_{zzzz} & \mathbb{C}_{zzxy} & \mathbb{C}_{zzyz} & \mathbb{C}_{zzzx} \\ \mathbb{C}_{xyxx} & \mathbb{C}_{xyyy} & \mathbb{C}_{xyzx} & \mathbb{C}_{xyxy} & \mathbb{C}_{xyyz} & \mathbb{C}_{xyzx} \\ \mathbb{C}_{yzxx} & \mathbb{C}_{yzxy} & \mathbb{C}_{yzzx} & \mathbb{C}_{yzxy} & \mathbb{C}_{yzyz} & \mathbb{C}_{yzzx} \\ \mathbb{C}_{zxxx} & \mathbb{C}_{zxyx} & \mathbb{C}_{zxzx} & \mathbb{C}_{zxxy} & \mathbb{C}_{zxyz} & \mathbb{C}_{zxzx} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}$$

OSS: in generale un tensore del IV ordine ci sono 81 termini (un tensore del II ordine ha 9 componenti); noi abbiamo scritto però una matrice 6×6 perchè stiamo lavorando con tensori (simmetrici) elastici, che mappano una matrice 6×1 in una matrice 6×1 , quindi ha 36 componenti.

MODELLO ELASTICO ALLA GREEN

Un modello per il quale

$$\exists \underbrace{\psi(\varepsilon)}_{\substack{\text{FUNZIONE} \\ \text{SCALARE:} \\ \text{POTENZIALE} \\ \text{ELASTICO}}} : \quad \sigma = \frac{d\psi}{d\varepsilon} = \sigma(\varepsilon)$$

↳ la derivata di ψ sarà funzione di ε

$$\sigma = \mathbb{C} \varepsilon \quad \text{modello lineare (} \psi \text{ deve essere una funzione quadratica in } \varepsilon \text{)}$$

$\mathbb{C}$ è una matrice simmetrica perchè, nella teoria di Green, è dotato anche di simmetrie maggiori:

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{klij} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\psi}{d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{kl}} = \frac{d\psi}{d\varepsilon_{kl} d\varepsilon_{ij}}$$

purché la funzione sia sufficientemente continua. Allora $\mathbb{C}_{ijkl}$ è dotato di 21 componenti.

Il modello di Green implica il modello di Cauchy mentre non vale il viceversa, quindi:

- se un materiale è alla Green allora è anche alla Cauchy,
- se un materiale è alla Cauchy non è detto che sia un materiale alla Green.

$$\sigma = \frac{d\psi}{d\varepsilon} \Rightarrow \sigma = \sigma(\varepsilon)$$
$$\sigma = \sigma(\varepsilon) \not\Rightarrow \sigma = \frac{d\psi}{d\varepsilon}$$

SIMMETRIA MAGGIORE E MINORE

Nel modello di Green si ha:

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}^T \Leftrightarrow C_{ijkl} = C_{klij} \rightarrow \text{simmetria maggiore}$$

come mai c'è simmetria maggiore?

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = C_{klij} \quad \text{se la funzione è abbastanza continua}$$

l'ordine di derivazione non cambia

Nel modello di Cauchy si ha:

$$C_{ijkl} \neq C_{klij}$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$$

→ simmetria minore

sta mappando tensori simmetrici in tensori simmetrici

MATERIALI ISOTROPI

Materiale la cui risposta non dipende dalla direzione di prova. La differenza dipende non dal materiale ma dalla struttura interna. Ad esempio:

- se tiro la mascherina in due direzioni, risponde in maniera diversa → materiale non isotropo;
- se tiro un foglio di carta in due direzioni, risponde allo stesso modo → materiale isotropo.

MODELLO LINEARE ELASTICO ISOTROPO

Si può dimostrare che il tensore $\mathbb{C}$ dipende solamente due componenti.

$$\underbrace{\{\epsilon\}}_{6 \times 1} = \underbrace{[\mathbb{C}]}_{6 \times 6}^{-1} \underbrace{\{\sigma\}}_{6 \times 1}$$

$$[\mathbb{C}^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \hline \emptyset & \emptyset & \emptyset & \frac{2(1+\nu)}{E} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \frac{2(1+\nu)}{E} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix}$$

Tali componenti sono E (modulo di Young) e ν (modulo di Poisson). Ora vogliamo capire il significato fisico di tali costanti e come misurarle. Per fare ciò dobbiamo cercare di rileggere la prova di trazione nel modello 3D.

PROVA DI TRAZIONE NEL MODELLO 3D

Lo stato tensionale che mi auguro trovare è:

$$\sigma_{xx} \neq 0$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = \emptyset$$

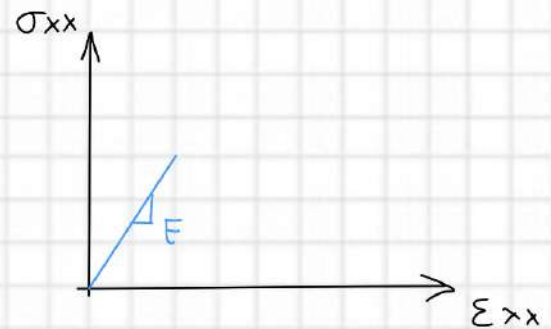
Si ha:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \phi \\ \phi \\ \phi \\ \phi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} \sigma_{xx} \\ -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} \\ -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} \\ \phi \\ \phi \\ \phi \end{pmatrix}$$

Il cilindro centrale rimane un cilindro $\rightarrow$ non c'è variazione di angolo $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$

Il modulo elastico E è la pendenza della prima parte di curva:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx} \rightarrow \sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$$



Ora calcoliamo il modulo di Poisson:

$$\begin{aligned} \epsilon_{yy} &= -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ &= -\nu \epsilon_{xx} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nu = - \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}}$$

fisicamente, a meno del segno, rappresenta il rapporto tra l'allungamento trasversale alla direzione che sto tirando e l'allungamento nella direzione che sto tirando.

In generale, se si tira un materiale in una direzione, si accorcia nell'altra $\Rightarrow$ i valori tipici sono del coefficiente di Poisson sono 0,1 o 0,3.

Nella prova di trazione si riesce a misurare sicuramente il modulo di Young; è invece più complicato misurare il coefficiente di Poisson.

PROVA DI TORSIONE

Usata per calcolare il modulo di Poisson. Vengono solitamente usati provini cilindrici cavi.



Si ha:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2\tau_{xy}(1+\nu)}{E} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Da cui si evince che non si hanno variazioni di lunghezza ma solo variazioni di angolo.

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\gamma_{xy} = 2 \frac{(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

E è noto dato che si presuppone che si faccia prima una prova di trazione.

CORPO OMOGENEO

Un corpo è detto omogeneo se in tutti i punti è fatto tutto dallo stesso materiale.

PROVA DI TRAZIONE

Primo esempio di risoluzione di un problema elastico.

Riprendiamo il modello deformabile 3D elastico lineare:

Cinematica

$$\epsilon = \nabla^S u \quad \text{in } \Omega$$

$$u = u_0 \quad \text{in } \partial\Omega_S$$

Equilibrio

$$\operatorname{div} \sigma + b = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\sigma = \sigma^T \quad \text{in } \Omega$$

$$\sigma n = t \quad \text{in } \partial \Omega_t$$

Legame costitutivo

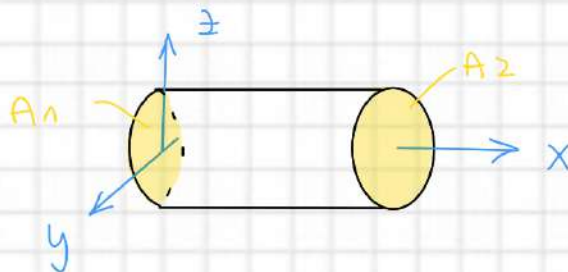
$$\sigma = \mathbb{C} \varepsilon$$

Il punto è che risolvere queste equazioni su un corpo caricato con certe condizioni al bordo è pressoché impossibile. Abbiamo solamente pochi casi in cui possiamo risolverle, ad esempio la prova di trazione.

Dobbiamo:

- fissare un dominio Ω
- trovare in Ω un campo vettoriale u , un campo tensoriale ε simmetrico e un campo tensoriale σ che soddisfi le equazioni scritte precedentemente.

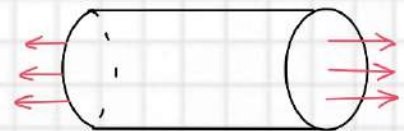
Il dominio nel quale lavoro è cilindrico (parte centrale dell'osso di cane).



Supponiamo di assegnare noi lo stato tensionale (compatibile con quello che mi aspetto accada dalla prova):

$$\sigma_{xx} \neq 0$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$



Per poter risolvere il seguente problema devo "costruire la soluzione" → si cerca di capire come può fare, si fanno delle ipotesi. Ad esempio:

$$b = 0 \quad \rightarrow \text{trascuro il peso dell'elementino} \quad \bullet$$

$$\sigma_{xx} = \cos t \neq 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \bullet$$

bisogna capire se sono ammissibili tali ipotesi, prendo le equazioni dell'equilibrio:

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_{xx}}{dx} + \frac{d\tau_{xy}}{dy} + \frac{d\tau_{xz}}{dz} + b_x = 0 \\ \frac{d\tau_{xy}}{dx} + \frac{d\sigma_{yy}}{dy} + \frac{d\tau_{yz}}{dz} + b_y = 0 \end{cases}$$

$$\left(\cancel{\frac{d\tau_{zx}}{dx}} + \cancel{\frac{d\tau_{zy}}{dy}} + \cancel{\frac{d\sigma_{zz}}{dz}} + \cancel{b_z} = 0 \right.$$

⇒ le equazioni di equilibrio sono banalmente soddisfatte.

Ora calcoliamo il tensore delle deformazioni attraverso le equazioni del legame costitutivo:

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ \epsilon_{yy} = -\frac{\sigma_{xx}}{E} \nu \\ \epsilon_{zz} = -\frac{\sigma_{xx}}{E} \nu \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{xz} = 0 \\ \gamma_{yz} = 0 \end{cases}$$

σ_{xx} è costante quindi anche ϵ è costante → abbiamo soddisfatto le equazioni del legame costitutivo.

Mancano le equazioni di compatibilità:

$$\epsilon = \nabla^s u$$

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \epsilon_{xx} \\ \frac{d\tau}{dy} = \epsilon_{yy} \\ \frac{d\omega}{dz} = \epsilon_{zz} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{du}{dy} + \frac{d\tau}{dx} = \gamma_{xy} \\ \frac{d\tau}{dz} + \frac{d\omega}{dy} = \gamma_{yz} \\ \frac{du}{dz} + \frac{d\omega}{dx} = \gamma_{xz} \end{cases}$$

Ma noi conosciamo questi termini, si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ \frac{d\tau}{dy} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ \frac{d\omega}{dz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{du}{dy} + \frac{d\tau}{dx} = \phi \\ \frac{d\tau}{dz} + \frac{d\omega}{dy} = \phi \\ \frac{du}{dz} + \frac{d\omega}{dx} = \phi \end{cases}$$

Suppongo E, ν note dalle prove. Deriviamo:

$$u(x, y, z) = \frac{\sigma_{xx}}{E} x + u_0(y, z)$$

$$N(x, y, z) = - \nu \frac{\sigma_{xx}}{E} y + N_0(x, z)$$

$$W(x, y, z) = - \nu \frac{\sigma_{xx}}{E} z + W_0(x, y)$$

Riprendo le equazioni precedenti. Pongo tali condizioni su u_0, y_0, w_0 :

$$\begin{cases} \frac{du_0}{dy} + \frac{dN_0}{dx} = 0 \\ \frac{dN_0}{dz} + \frac{dW_0}{dy} = 0 \\ \frac{du_0}{dz} + \frac{dW_0}{dx} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = 0 \\ N_0 = 0 \\ W_0 = 0 \end{cases}$$

Si ottiene un campo di spostamenti:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = \frac{\sigma_{xx}}{E} x \\ N(x, y, z) = - \nu \frac{\sigma_{xx}}{E} y \\ W(x, y, z) = - \nu \frac{\sigma_{xx}}{E} z \end{cases}$$

Ricapitolando si ha:

Tensore delle tensioni

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \cos \gamma \neq 0 \\ \sigma_{yy} = 0 \\ \sigma_{zz} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \\ \tau_{xz} = 0 \end{cases}$$

Tensore delle deformazioni

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ \epsilon_{yy} = - \frac{\sigma_{xx}}{E} \nu \\ \epsilon_{zz} = - \frac{\sigma_{xx}}{E} \nu \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{xz} = 0 \\ \gamma_{yz} = 0 \end{cases}$$

Campo degli spostamenti

$$\begin{cases} u(x, y, z) = \frac{\sigma_{xx}}{E} x \\ v(x, y, z) = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} y \\ w(x, y, z) = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} z \end{cases}$$

PROBLEMA DEL SAINT VENANT

Fino ad oggi abbiamo sviluppato una teoria meccanica di un corpo solido 3D deformabile, in particolare quello elastico; abbiamo parlato di:

- cinematica,
- equilibrio,
- legami costitutivi.

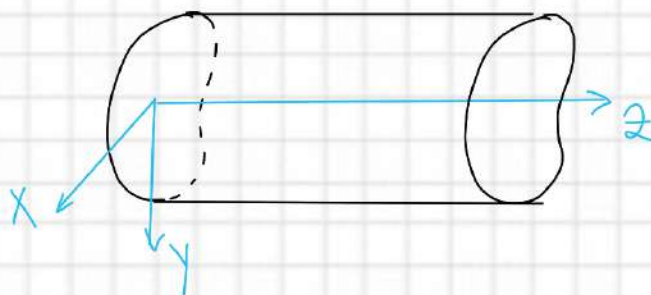
Siamo interessati a scrivere e risolvere le equazioni che descrivono il modello di corpo deformabile.

Esistono due approcci per risolvere tali equazioni:

- analitico $\rightarrow$ soluzione esatta (prova di trazione, problema del Saint Venant),
- numerico $\rightarrow$ soluzione approssimata (metodi degli elementi finiti).

Il problema del Saint Venant è una particolare classe di problemi di corpo solido deformabile elastico nel quale riusciamo (non sempre e non perfettamente) a calcolare una soluzione analitica.

Ipotesi geometriche $\rightarrow$ studio dei corpi cilindrici. Si parte da una figura piana (sezione retta) e la si fa traslare in direzione ortogonale al piano che contiene la figura:

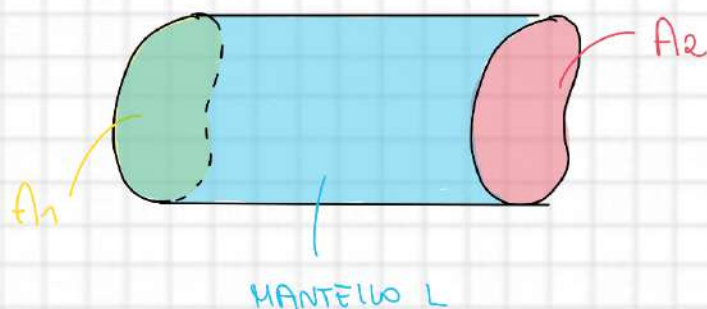


Si introduce così l'asse del cilindro che ricorda tanto una trave.

- Asse z : asse della trave,
- Assi x, y : assi baricentrici, principali di inerzia.

Ipotesi di materiale $\rightarrow$ il materiale è di tipo elastico lineare isotropo ed è un corpo omogeneo.

Ipotesi sul carico $\rightarrow$ il corpo è così caricato:



$$\Gamma \cup A_2 \cup L = \partial \Omega$$

FRONTIERA di Ω

$$\bullet \quad b = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\bullet \quad t = 0 \quad \text{su } L$$

$\Rightarrow$ posso caricare il corpo solo sulle basi

$$\begin{cases} t_1 \neq 0 & \text{su } A_1 \\ t_2 \neq 0 & \text{su } A_2 \end{cases}$$

Il corpo è un corpo libero che deve essere in equilibrio:

$$\begin{cases} R(\Omega) = 0 \\ M(\Omega) = 0 \end{cases}$$

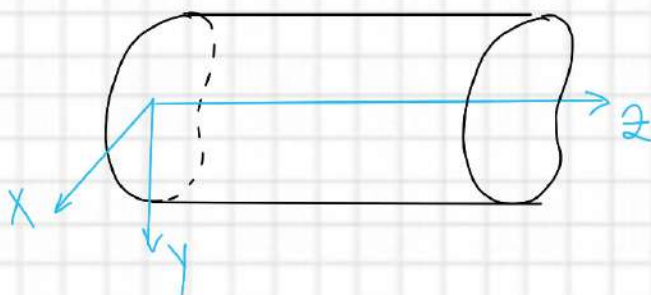
N.B. se tali equazioni sono soddisfatte il corpo non è in equilibrio $\Rightarrow$ sono condizioni necessarie ma non sufficienti perché si riferiscono all'intero corpo. Sono interessanti perché ci dicono che le forze che agiscono sulle due basi non possono essere indipendenti.

L'equilibrio nel corpo deformabile condizione necessaria sufficiente per l'equilibrio è:

$$\begin{cases} R(P) = 0 \\ M(P) = 0 \end{cases} \quad \forall P \in \Omega$$

$\Rightarrow$ la condizione di equilibrio scritta precedentemente è una sottoclasse di quest'ultima.

Ipotesi sullo stato tensionale interno $\rightarrow$ considero la base A2:



$$t_2 \neq 0$$

$$t_2 = \sigma \cdot n = \sigma e_3$$

$$\Rightarrow \sigma e_3 = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}$$

Quindi dalle condizioni al bordo, il tensore delle tensioni è fatto così:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Il problema di Saint Venant dice di considerare questo stato tensionale in ogni punto di Ω :

$$\Rightarrow \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0$$

Il problema di Saint Venant è lineare $\Rightarrow$ si parla di teorema di unicità della soluzione che si combina con il teorema di sovrapposizione degli effetti:

P: problema

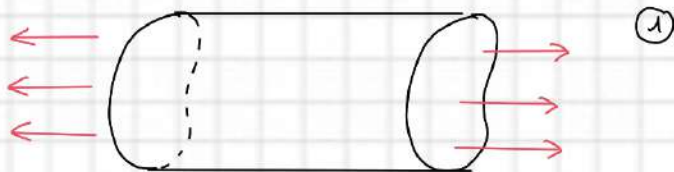
S: soluzione

$P1 \Rightarrow S1$

$P2 \Rightarrow S2$

$P1+2 \Rightarrow S1+2$

Ipotesi fondamentale del Saint Venant $\rightarrow$ si basa sul concetto di distanza di estinzione: consideriamo due distribuzioni differenti (ho due problemi) su uno stesso solido di Saint Venant. I due problemi hanno distribuzioni superficiali diverse ma le stesse risultanti:

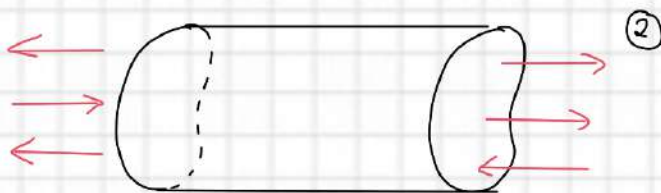


$$R_1 = \int_{A_1} t_1 dA$$

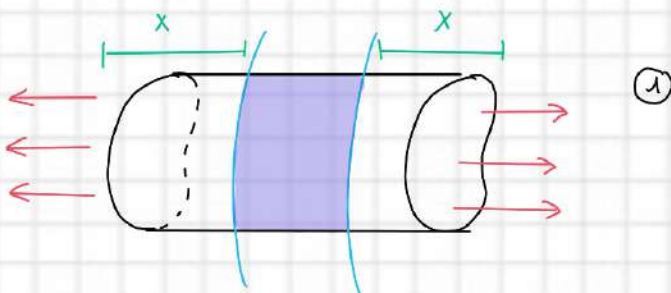
$$M_1 = \int_{A_1} t \cdot x dA$$

$$R_2 = \int_{A_2} t_2 dA$$

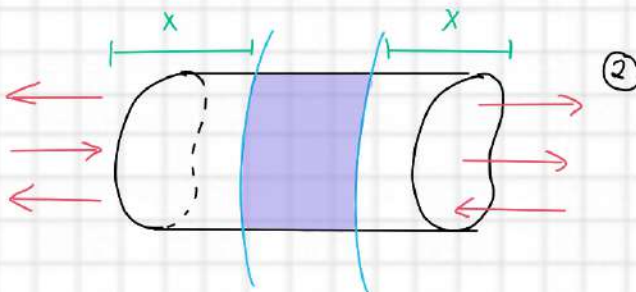
$$M_2 = \int_{A_2} t \cdot x dA$$



Se risolviamo P1 e P2 questi problemi avranno la stessa soluzione a una distanza dalle basi maggiore della distanza di estinzione:



la soluzione elastica in queste due zone sarà la stessa $\rightarrow$ non dipende dalla particolare distribuzione delle forze superficiali ma solo dalle risultanti delle forze superficiali.



$\Rightarrow$ il Saint Venant, guardando le risultanti, lavora per classi di equivalenza dei problemi, quindi considera uguali i problemi che hanno la stessa risultante. Considera 6 classi di equivalenza dato che momento e risultante sono due vettori a tre componenti ciascuno.

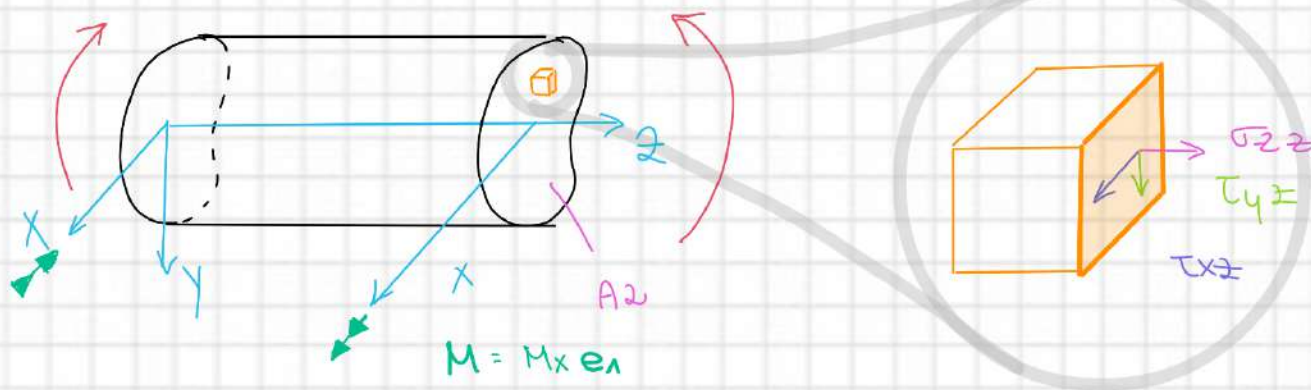
Quindi le classi di equivalenza alla Saint Venant sono 6.

Una di queste classi è il problema di trazione che abbiamo visto nella lezione scorsa.

Ora possiamo vedere un'altra classe di equivalenza nell'ambito di Saint Venant: problema di flessione retta.

PROBLEMA DI FLESSIONE RETTA

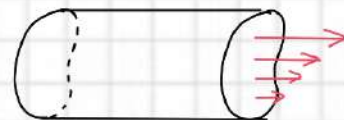
Problema nel quale assegno su A_2 una distribuzione di forze superficiali tali da produrre solo un momento flettente parallelo ad un asse. Dobbiamo capire quali forze superficiali generano M .



Quindi abbiamo ricavato queste componenti di tensione ma voglio che le componenti di tensione mi producano un momento flettente. E' evidente che deve essere: $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, $\sigma_{zz} \neq 0$

Suppongo di avere σ_{zz} in funzione di x e y :

$$\sigma_{zz}(x, y) = ax + by + c \quad a, b, c = \text{cost}$$



Se voglio un $M_x \neq 0$ significa che lo sforzo normale $N = 0$

$$N = \int_{A_2} \sigma_{zz} dA = 0 \Rightarrow \int_{A_2} ax + by + c dA = 0$$

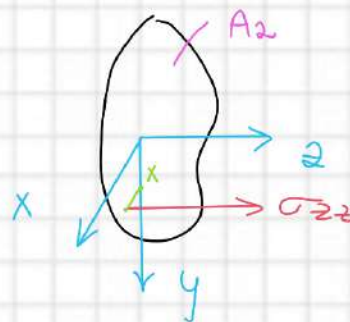
$$\Rightarrow \underbrace{a \int_{A_2} x dA}_{=0 \text{ SR BARICENTRICO}} + \underbrace{b \int_{A_2} y dA}_{=0 \text{ SR BARICENTRICO}} + \underbrace{c \int_{A_2} dA}_{=A} = 0$$

$$\Rightarrow c \cdot A = 0 \Rightarrow c = 0$$

Se impongo $M_y = 0$

$$M_y = \int_{A_2} \sigma_{zz} x dA = \dots \Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{zz} = by$$



Calcolo M_x

$$M_x = \int_{A_2} \sigma_{zz} y \, dA = \int_{A_2} (b y) y \, dA = b \underbrace{\int_{A_2} y^2 \, dA}$$

$$\Rightarrow M_x = b I_x$$

$$\Rightarrow b = \frac{M_x}{I_x}$$

I_x : come le aree sono distribuite attorno all'asse x

Si ottiene quindi:

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} y \quad \text{su } A_2 \quad \rightarrow \text{ipotesi sullo stato tensionale per il problema di Saint Venant di flessione retta}$$

Ora però dobbiamo riuscire a scrivere per ogni punto del corpo σ, ϵ, u .

hp. SAINT VENANT
SU A_2

$$\sigma = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} y$$

Ci chiediamo: questo stato tensionale è in equilibrio?

$$\operatorname{div} \sigma + \underset{= \cos t}{b} = 0 \Rightarrow \frac{d \sigma_{zz}}{dz} = 0 \rightarrow \text{unica condizione di equilibrio non banale}$$

$$\Rightarrow \underset{= \cos t}{\frac{M_x}{I_x} y} = 0 \rightarrow \text{equazione soddisfatta}$$

Ora vediamo il tensore delle deformazioni considerando le equazioni del legame costitutivo:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$
$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz} \\ \epsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz} \\ \epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{xz} = 0 \\ \gamma_{yz} = 0 \end{cases}$$

Dallo stato deformativo attraverso le equazioni di congruenza passiamo al campo degli spostamenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz} \\ \epsilon_{yy} = \frac{dv}{dy} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz} \\ \epsilon_{zz} = \frac{dw}{dz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0 \\ \gamma_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0 \\ \gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = 0 \end{array} \right.$$

Si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dx} = -\frac{\nu}{E} \frac{M_x}{I_x} y \\ \frac{dv}{dy} = -\frac{\nu}{E} \frac{M_x}{I_x} y \\ \frac{dw}{dz} = \frac{M_x}{E I_x} y \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0 \\ \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0 \\ \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = 0 \end{array} \right.$$

Integrando e trascurando il contributo di moto rigido si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -\frac{\nu}{E} \frac{M_x}{I_x} y x \\ v = -\frac{M_x}{2E I_x} [z^2 + \nu(y^2 - x^2)] \\ w = \frac{M_x}{E I_x} z x \end{array} \right.$$

CRITERI DI RESISTENZA

Nel corso abbiamo sviluppato diversi modelli, il più sofisticato è il modello di corpo deformabile. In particolare, ci siamo focalizzati su tre argomenti:

- cinematica $\rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \mathbf{u} + \boldsymbol{\beta C}$
- equilibrio $\rightarrow \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} + \boldsymbol{\beta C}$
- legami costitutivi $\rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\mathbb{C}} \boldsymbol{\varepsilon}$

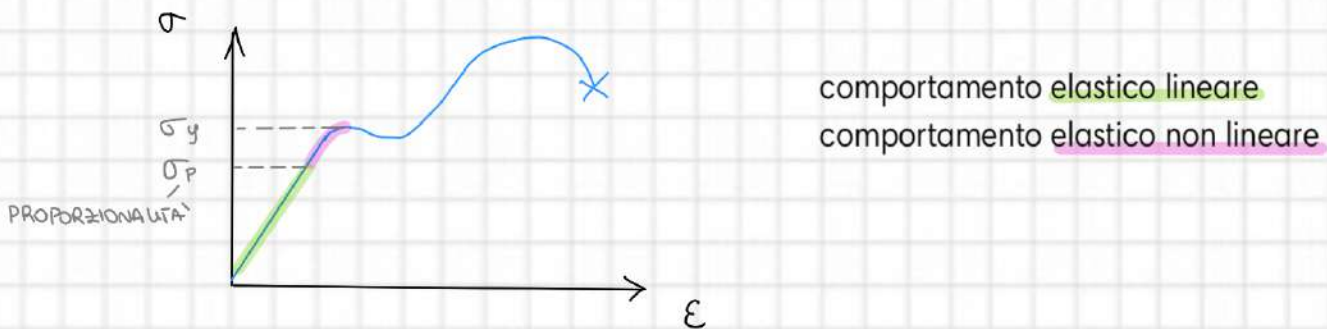
Il modello di corpo deformabile può essere risolto in maniera:

- analitica: che fornisce una soluzione esatta (problema del Saint Venant),
- numerica: che fornisce una soluzione approssimata $\rightarrow$ più flessibile (metodo degli elementi finiti).

Risolvere un modello di corpo deformabile vuol dire calcolare $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}$ in Ω .

Ma l'obiettivo ultimo dell'ingegnere è progettare strutture che reggano il carico di progetto, quindi si deve garantire che la struttura "funzioni" e lavori in sicurezza.

Se ad esempio progetto uno stent, decido il materiale (acciaio), vado in laboratorio e faccio un test di trazione:



Posso utilizzare solamente il primo tratto dato che per ipotesi stiamo considerando un modello elastico lineare $\rightarrow$ dobbiamo garantire $\sigma < \sigma_P$.

Ma noi dobbiamo risolvere il problema elastico, quindi calcolare in ogni punto del corpo $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}$.

Quindi dalla risoluzione non si ottiene uno scalare ma un tensore, ma scrivere la forma $\sigma < \sigma_P$ non ha senso (non si può confrontare una matrice con uno scalare, inoltre la matrice non è ordinabile).

Si introduce il criterio di resistenza o funzione di snervamento che prende una matrice e restituisce una quantità scalare detta tensione equivalente:

$$f: \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \sigma^{eq}$$

Grazie a f , riusciamo a scrivere σ^{eq} che è funzione del tensore delle tensioni:

$$f = \sigma^{eq}(\boldsymbol{\sigma})$$

Il criterio di resistenza si sceglie in modo sperimentale $\rightarrow$ si fanno tante prove e si decide quale funzione descrive effettivamente il comportamento del materiale.

CRITERIO DI TRESCA O DELLA MASSIMA TENSIONE TANGENZIALE

Prima va risolto un problema di autovalori e poi verificare che:

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \} \leq \sigma_p$$

CRITERIO DI VON MISES O CRITERIO DELLA MASSIMA ENERGIA DI DISTORSIONE

$$\left[(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) - (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] \leq \sigma_p^2$$

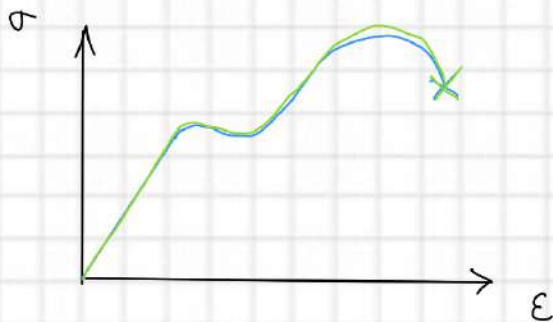
Il criterio di Tresca funziona bene con i materiali granulari (tipo i terreni) mentre quello di Von Mises funziona bene per i materiali metallici.

Quindi si ha:

$$f(\sigma) = \sigma^{eq} < \sigma_p \quad \forall x \in \Omega \rightarrow \text{deve valere per (idealmente) tutti i punti del mio corpo}$$

COEFFICIENTE DI SICUREZZA

Un importante aspetto da considerare è la aleatorietà dei dati: è impossibile che due provini anche se presi dallo stesso materiale, abbiano la stessa identica curva sforzo-deformazione:



Inoltre, anche le condizioni di carico possono variare. Quindi per difendersi da questa aleatorietà dei dati si introduce il coefficiente di sicurezza S:

$$\sigma^{eq} < \frac{\sigma_p}{S} \quad (S > 1)$$

A vantaggio di sicurezza prendo la σ_p ridotta di un fattore S dato che vogliamo essere molto lontani dal valore ultimo di progetto.

FORZE

Definizione empirica: azioni di corpi (o di parti di essi) su altri corpi (o su altre parti di essi).

Tutte le forze sono grandezze vettoriali → una singola forza è caratterizzata da 3 proprietà:

- intensità (magnitude),
- direzione,
- punto di applicazione.

Inoltre, posso comporre/decomporre secondo le regole vettoriali.

Possono essere:

1. Concentrate: (idealizzazione della realtà).

2. Distribuite: dipendono dalla regione su cui agiscono; possono essere:

- di volume: come ad esempio la gravità o le forze di campo (magnetiche, elettriche...) → $\frac{F}{\ell^3}$
- di area: ad esempio il carico di una diga → $\frac{F}{\ell^2}$
- di linea: ES biomeccanico: l'azione di un bisturi sulla pelle (la larghezza è così piccola che è trascurabile) → $\frac{F}{\ell}$

3. Attive: forze che agiscono sul sistema meccanico derivanti dalla fisica del sistema.

ES: forza peso, spinta del vento, carico da neve;

ES biomeccanico: forza di un bilancere tenuto.

4. Passive: hanno a che fare con i vincoli:

- collegamenti del sistema materiale all'ambiente esterno,
- trasmettono forze al sistema (reazioni vincolari o forze reattive).

ES biomedico: forza in un'articolazione

5. Esterne: agiscono sul sistema meccanico dall'esterno.

ES biomeccanico: forza peso.

6. Interne: agiscono tra diverse parti del sistema.

ES biomeccanico: azione del femore sull'acetabolo.

FORZE CONCORRENTI E COMPLANARI

SOMMA

Forze concorrenti: forze che hanno lo stesso punto di applicazione.

Forze complanari: forze che vivono sullo stesso piano.

Prima operazione invariantiva: lo stato meccanico (quiete/moto) è invariante per composizione/

decomposizione di più forze in un punto.

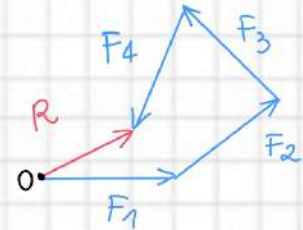
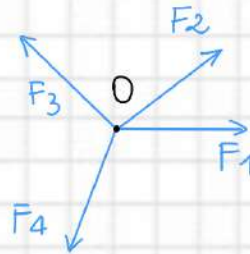
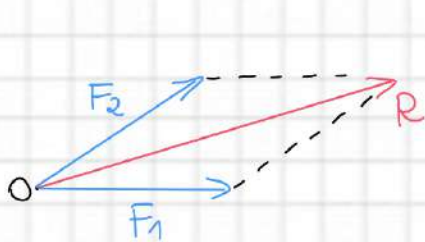
grassetto: quantità vettoriale

Quindi posso sostituire:

- più forze concorrenti con la loro risultante R ,
- una forza f con più forze concorrenti e che ammettano f come risultante.

Nel caso di forze concorrenti e complanari, posso usare la regola del parallelogramma → risultante come diagonale del parallelogramma avente come lati le due forze (head-tail rule) → riduzione del sistema.

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i$$



EQUILIBRIO

La condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un punto materiale è che la risultante delle forze sia nulla:

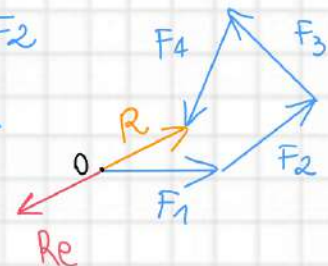
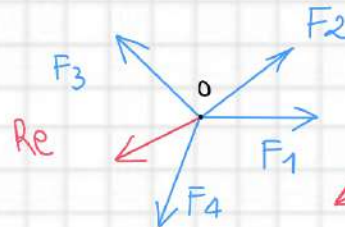
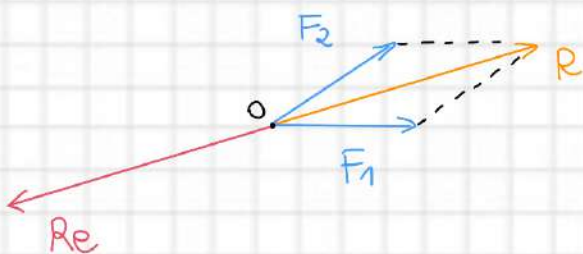
$$R = \sum_{i=1}^n F_i = 0 \rightarrow 3 \text{ equazioni scalari (assumendo un sistema di rif. ortogonale x-y-z):}$$

$$\sum F_{ix} = R_x = 0$$

$$\sum F_{iy} = R_y = 0$$

$$\sum F_{iz} = R_z = 0$$

Con riferimento agli esempi presentati in figura, la condizione di equilibrio sarà ottenuta aggiungendo al sistema di forze una forza R_e uguale e contraria alla risultante R .



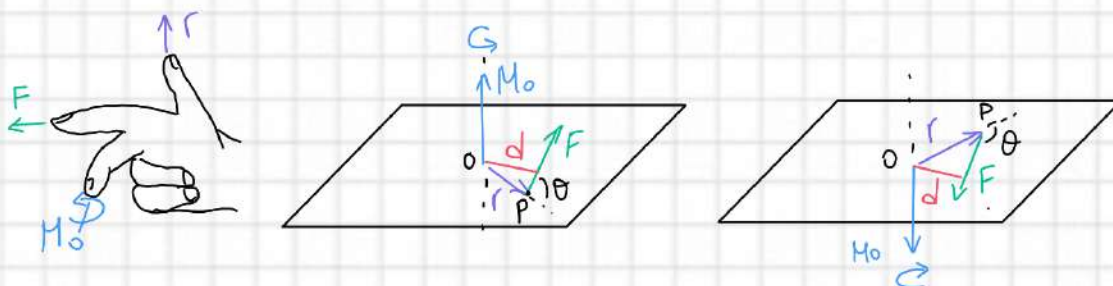
MOMENTO DI UNA FORZA

Il concetto di momento si inserisce nella discussione di problemi di equilibrio inerenti ad un qualunque sistema materiale con dimensioni non trascurabili (quindi non riconducibili al punto materiale) → la sollecitazione del sistema dipende dal punto di applicazione delle forze che su di esso agiscono.

Definizione: data una forza F applicata in un punto P , fissato un punto O detto polo, si definisce momento di F rispetto ad O il vettore M_O risultante dal prodotto vettoriale $r \times F$, dove r è il vettore $(P - O)$.

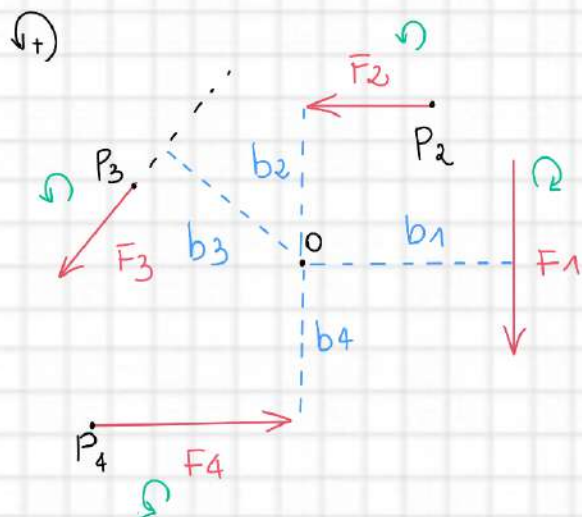
Tale vettore M_O avrà:

- Modulo: $\|M_O\| = \|F\| \|r\| \sin\theta = \|F\| d$
 θ angolo tra r e F
 $d = \|r\| \sin\theta$ braccio del momento rispetto al polo O .
- Direzione: perpendicolare al piano su cui giacciono r e F .
- Verso: secondo la regola della mano destra:



Poiché le forze applicate ad una struttura sono in genere diverse, si definisce momento di un sistema di forze F_i applicate nei punti P_i , rispetto a un polo O , la somma algebrica (richiede convenzione!) dei singoli momenti:

$$M_O = \sum_{i=1}^n M_O^{(i)} \Rightarrow \|M_O\| = \sum_{i=1}^n \|F_i\| d_i$$



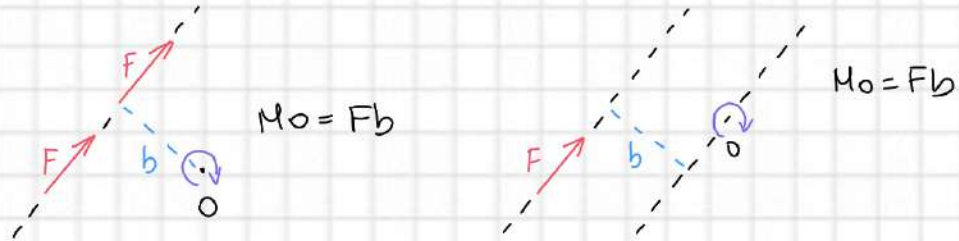
OSS: il momento dipende dal polo rispetto al quale lo calcoliamo

M_O ha:

- direzione: perpendicolare al piano
- modulo: $M_O = -F_1 b_1 + F_2 b_2 + F_3 b_3 + F_4 b_4$

PROPRIETA'

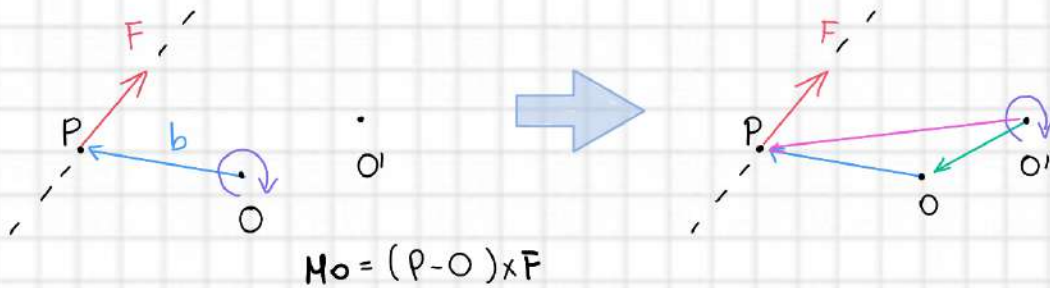
- Il momento di una forza rispetto a un polo non varia se si fa scorrere la forza lungo la sua retta di azione, così come se si sposta il polo lungo la parallela alla retta d'azione della forza.



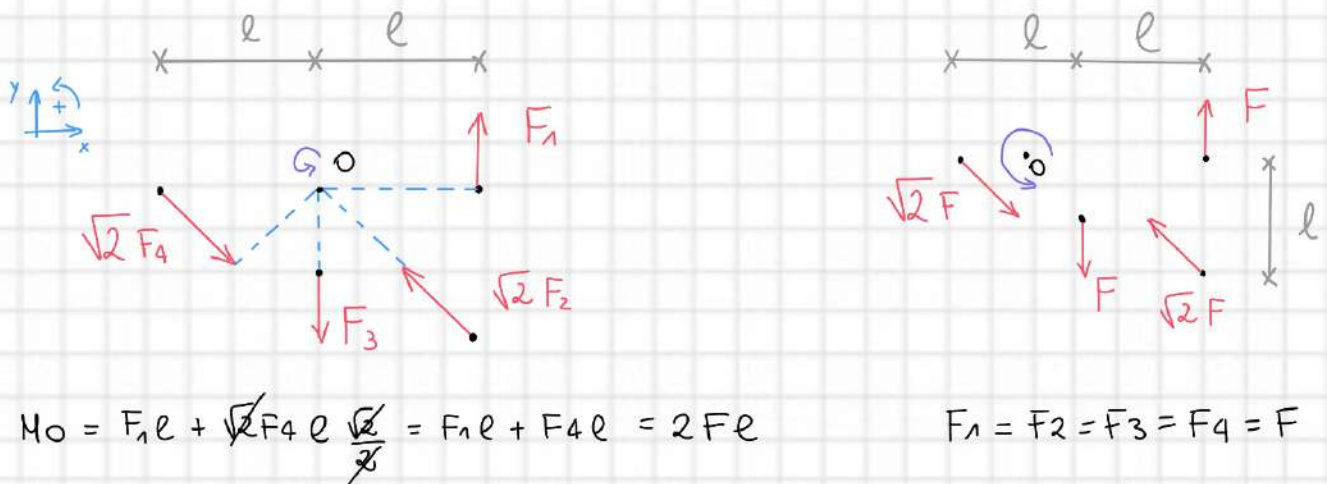
- Il momento varia al variare del polo (da O a O') ed è uguale alla somma vettoriale del momento M_O e del momento che la forza avrebbe, rispetto a O' , se fosse applicata in O :

- $M_{O'} = M_O + (O - O') \times F$
- $M_{O'} = M_O + (O - O') \times R$

$$M_{O'} = M_O + (O - O') \times F$$

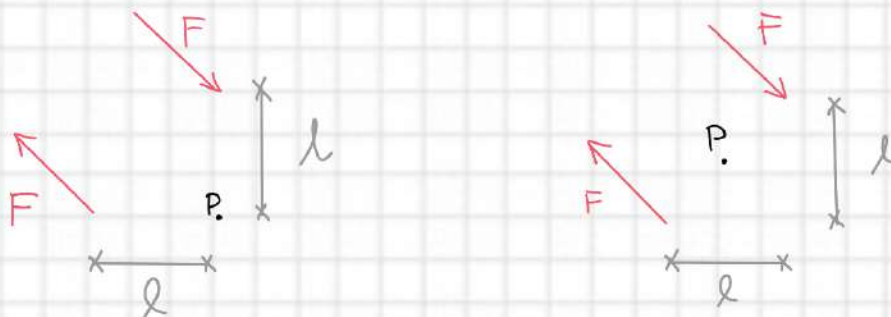


- Il momento di un sistema di forze a risultante nulla non varia al variare del polo.



OSS: se il braccio è parallelo alla forza, il momento è nullo.

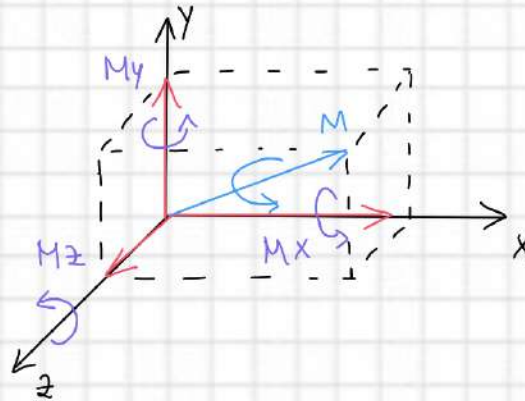
- Dato un qualunque sistema di forze, il momento non varia se il polo si sposta parallelamente alla risultante.



- Un dato momento M_O può essere espresso secondo le sue componenti rispetto ad un sistema di basi/assi (e_x, e_y, e_z) come $M_O = M_x e_x + M_y e_y + M_z e_z$

oppure come momento rispetto ad un asse:

1. la proiezione ortogonale su quell'asse del vettore momento calcolato rispetto ad un qualsiasi punto dell'asse,
2. scalare che, dal punto di vista fisico, rappresenta l'incentivo parziale alla rotazione rispetto a quel dato asse indotto dal sistema di forze; ad esempio gli scalari M_x , M_y , M_z , sono i momenti rispetto agli assi cartesiani.



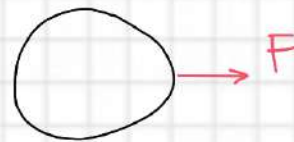
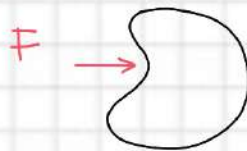
TEOREMA DI VARIGNON

Il momento di più forze applicate nello stesso punto P è pari al momento della risultante R applicata in P.

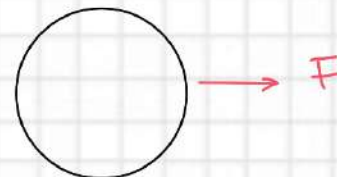
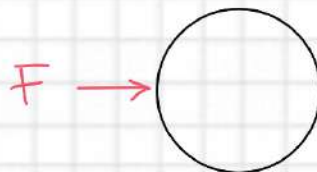
EQUIVALENZA TRA SISTEMI DI FORZA

Un corpo rigido non cambia il suo stato di quiete o di moto se una qualunque delle forze su di esso agente scorre lungo la sua retta di azione (seconda operazione invariantiva).

Corpo deformabile



Corpo rigido



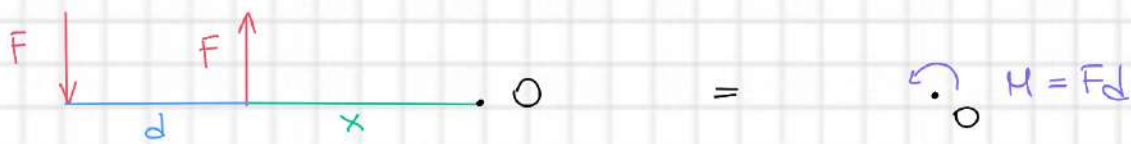
Ricondurre un sistema di forze ad un altro significa mantenere inalterati **R** e **M** rispetto ad un polo (condizione necessaria e sufficiente). Riconduco un sistema di forze ad un altro applicando (uno o più volte) la prima e la seconda operazione invariantiva.

Coppia: due forze opposte non allineate.

Momento di una coppia di forze ciascuna con modulo $\|F\|$ e distanti fra loro d risulta in un momento con modulo $\|F\|d$ rispetto a qualsiasi polo O .

Si dice braccio della coppia la distanza d fra le rette di azione delle forze che definiscono la coppia. La coppia si può rileggere come un momento.

$$\|M_O\| = \|F\| (d + x) - \|F\| x$$



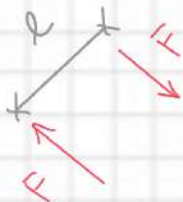
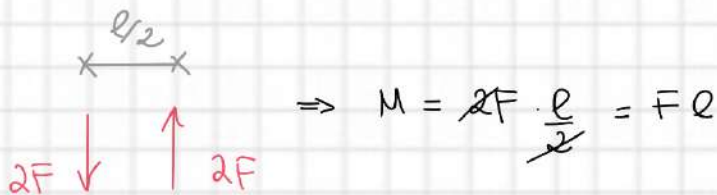
MOMENTO DI TRASPORTO

Data l'indipendenza dal polo, il momento generato dalla coppia si può indicare con una freccia ruotante sul piano della coppia e spiccata in un qualsiasi punto.

PROPRIETA'

- tutte le coppie di ugual momento sono equivalenti,
- una coppia può essere trasportata comunque nel piano in cui giace senza modificazioni al campo di momento che essa induce.

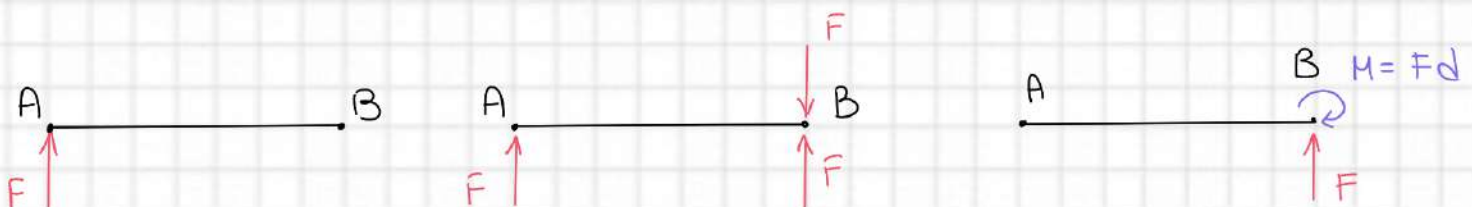
ES: ragioniamo sulla frase "tutte le coppie di ugual momento sono equivalenti"; data la struttura, disegnare una nuova coppia che rispetti tale frase.



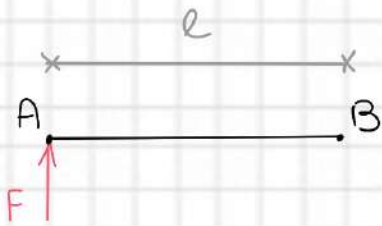
questo genera un momento $M = Fl$ che però ha verso opposto

L'aggiunta di una coppia opportuna permette di trasportare una forza da una retta di applicazione ad un'altra (momento di trasporto).

Qualunque sistema di forze è equivalente alla risultante R applicata in O più una coppia di momento uguale al momento globale, dato dal sistema rispetto ad O .

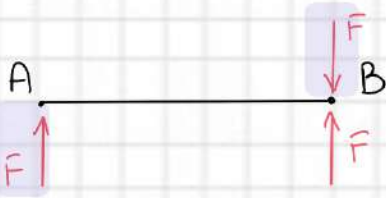


ES: analizziamo ciascun sistema.



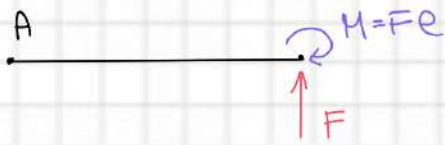
$$M_A = F \cdot \phi = \phi$$

$$M_B = Fl$$



$$M_A = F \cdot \phi + Fl - Fl = \phi$$

$$M_B = Fl - F\phi + F\phi = Fl$$



ho sostituito la coppia con un momento

$$M_A = \phi$$

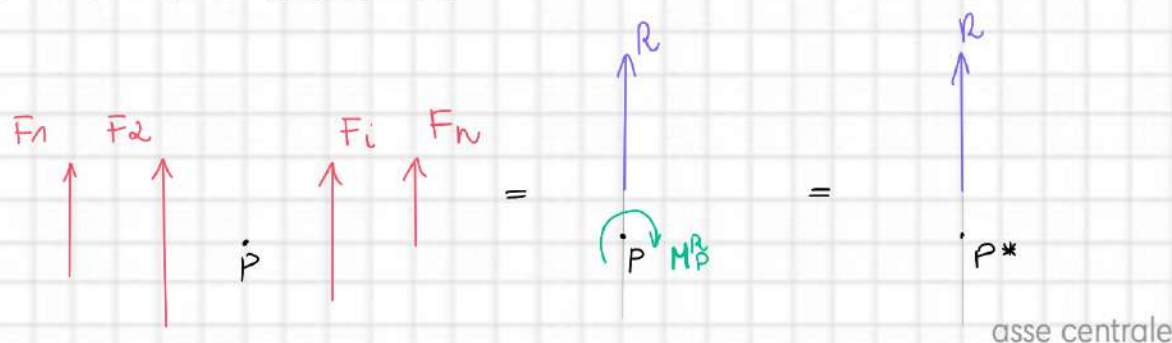
$$M_B = Fl$$

EQUIVALENZA TRA SISTEMI DI FORZE

Consideriamo il caso in cui il sistema è composto da forze complanari e parallele. Posso ottenere un sistema di forze equivalente:

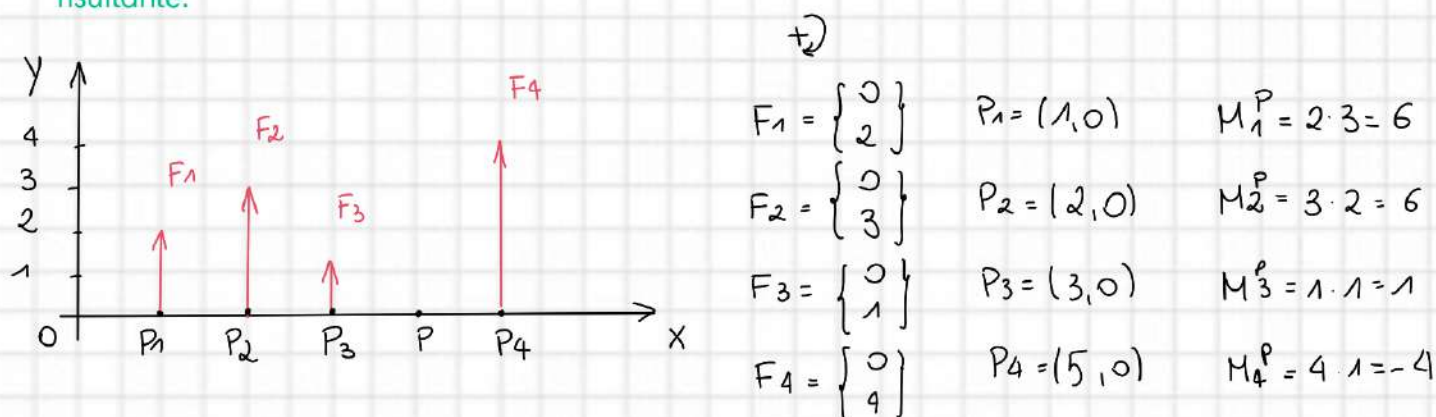
- usando la risultante $\mathbf{R}$ ed il momento risultante rispetto ad un dato polo P ,
- usando $\mathbf{R}$ applicato nel punto P^* opportuno (imponendo che sia $\mathbf{M}_{P^*}^R = 0$ o sfruttando il concetto di momento di trasporto).

La retta d'azione passante per P^* della risultante $\mathbf{R}$, che può scorrere lungo questa retta, per la seconda operazione invariante, detta asse centrale.



ES: assegnato il sistema di forze piano rappresentato in figura si vuole:

- determinarne il sistema equivalente vettore-momento risultante applicato nel punto $P = (4, 0)$,
- trovare il punto di applicazione P^* tale per cui il sistema di vettori è equivalente al solo vettore risultante.



Il vettore risultante sarà:

$$\{\mathbf{F}\} = \sum_{i=1}^n \{\mathbf{F}_i\} = \{0, 10\}^T$$

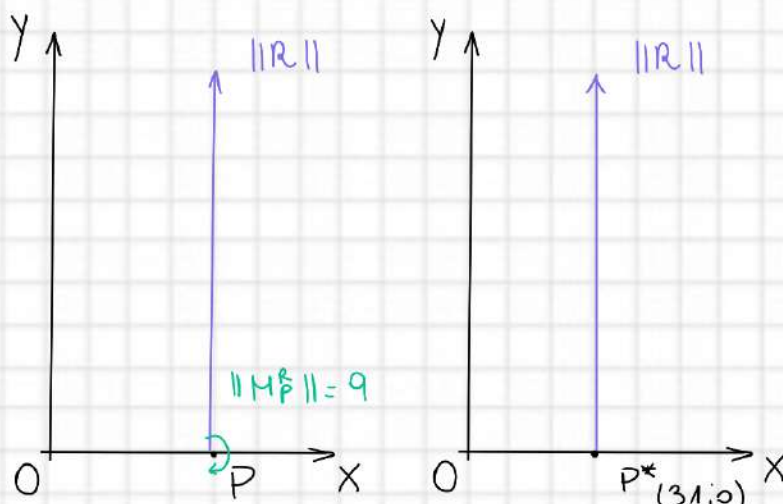
Il momento risultante sarà:

$$\|\mathbf{M}_P^R\| = \sum_{i=1}^n \|\mathbf{F}_i\| d_i(P) = 9$$

Il punto O sarà invece dato da:

$$\|\mathbf{R}\| P^* = \sum_{i=1}^n M_i^P$$

$$P^* = \frac{(2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 5)}{10} = 3,1$$

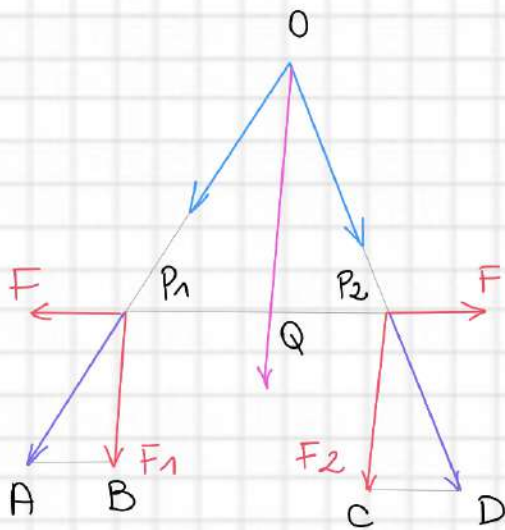


Lo stesso risultato lo avremmo ottenuto sfruttando il metodo di trasporto.

Per un sistema di forze piano si ha allora che:

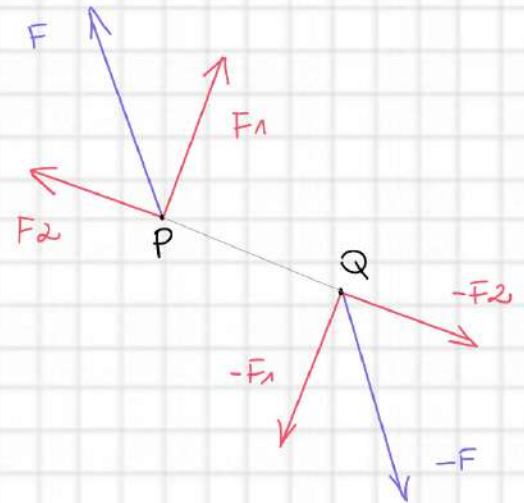
Se risultante non nulla

1. Due forze convergenti sono equivalenti alla loro risultante **R** applicata nel punto d'intersezione delle loro rette d'azione.
2. Due forze parallele possono essere ricondotte a due forze convergenti aggiungendo due forze opposte allineate → caso 1.
3. Per più forze applico 1. e 2. in maniera iterativa.



Se risultante nulla

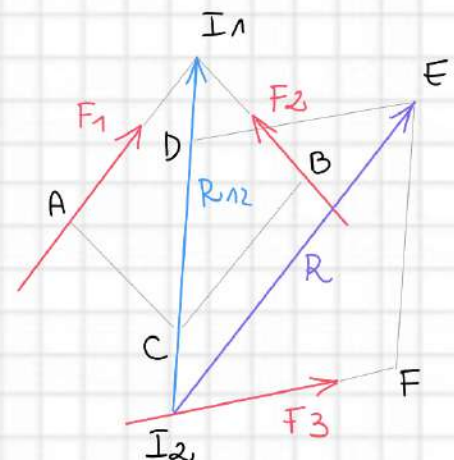
- Il sistema è riconducibile ad una coppia, di momento uguale a quello del sistema originario, rispetto ad un qualunque punto (il momento è invariante).
- Una coppia può essere trasformata in un'altra, in cui le forze che la costituiscono risultano perpendicolari alla congiungente i loro punti di applicazione.



SOMMA DI FORZE NON CONCORRENTI E COMPLANARI

Forze concorrenti a risultante non nulla:

- trovo intersezione I_1 tra F_1 e F_2 ,
- trovo risultante R_{12} con la legge del parallelogramma (IACB),
- trovo intersezione I_2 tra R_{12} e F_3 ,
- ... trovo R .

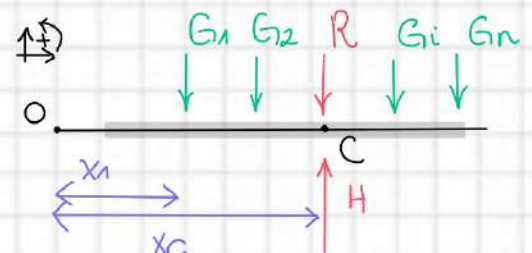


CENTRO DELLE FORZE

Applicando una forza H uguale e contraria a R si ottiene:

$$\sum F = H - \sum_i G_i = 0$$

$$\sum M = x_c H - \sum_i x_i G_i = 0$$



Possiamo definire: $x_c = \frac{\sum_i x_i G_i}{\sum_i G_i} \Rightarrow$ centro delle forze

Generalizzando ad un caso piano (xy) avremo: $x_c = \frac{\sum_i x_i G_i}{\sum_i G_i}$, $y_c = \frac{\sum_i y_i G_i}{\sum_i G_i}$

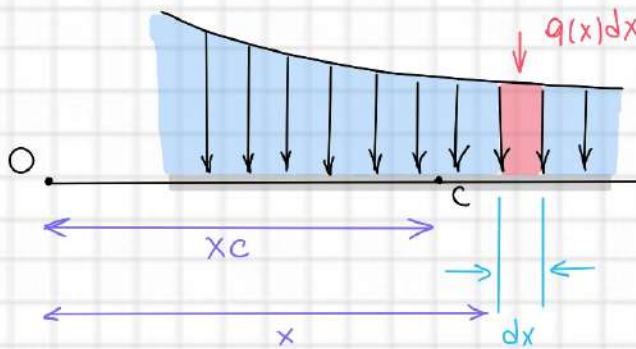
Se si passa da forze concentrate a forze distribuite si ricorre all'integrale:

$$x_c = \frac{\int x q(x) dx}{\int q(x) dx} \quad q(x) \rightarrow \text{dimensione} \left[\frac{F}{L} \right]$$

Nel caso 2D:

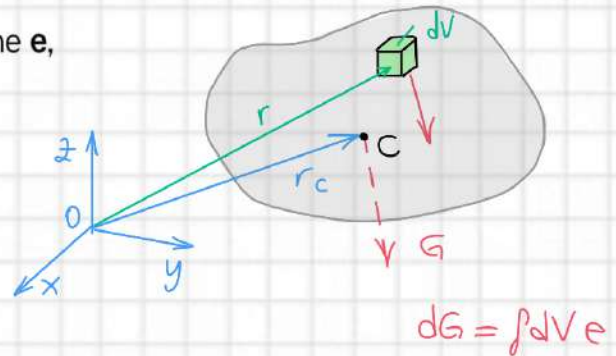
$$x_c = \frac{\int x q(x,y) dA}{\int q(x,y) dA}, \quad y_c = \frac{\int y q(x,y) dA}{\int q(x,y) dA},$$

dA è un'area infinitesima e $q(x,y)$ carico di superficie distribuito $\rightarrow$ dimensione $\left[\frac{F}{L^2} \right]$



CENTRO DI GRAVITA'

- $f(x, y, z) \left[\frac{F}{L^3} \right]$: forze di volume parallele secondo la direzione $\mathbf{e}$,
- dV : volume infinitesimo di posizione
 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$
- $dG = [f(x, y, z) dV]\mathbf{e}$: forza di volume che agisce su dV ,



$$\mathbf{G} = \int d\mathbf{G} = \left(\int_V f(x, y, z) dV \right) \mathbf{e} = G\mathbf{e} \quad (\text{risultante})$$

$$\mathbf{r}_c \times \mathbf{G} = \int \mathbf{r} \times d\mathbf{G} \quad (\text{risultante dei momenti})$$

sostituendo: $\mathbf{r}_c G - \int_V \mathbf{r} f(x, y, z) dV \times \mathbf{e} = \mathbf{0}$

quindi: $\mathbf{r}_c = \frac{\int_V \mathbf{r} f(x, y, z) dV}{\int_V f(x, y, z) dV}$

che secondo le componenti risulta:

$$x_c = \frac{\int_V x f(x, y, z) dV}{\int_V f(x, y, z) dV}$$

$$y_c = \frac{\int_V y f(x, y, z) dV}{\int_V f(x, y, z) dV}$$

$$z_c = \frac{\int_V z f(x, y, z) dV}{\int_V f(x, y, z) dV}$$

assumendo: $f(x, y, z) = \rho(x, y, z) g$ ($g = \text{cost}$) $\rightarrow$ le coordinate del centro di gravità:

$$x_c = \frac{\int_V x \rho dV}{\int_V \rho dV}$$

$$y_c = \frac{\int_V y \rho dV}{\int_V \rho dV}$$

$$z_c = \frac{\int_V z \rho dV}{\int_V \rho dV}$$

se $\rho dV = dm \rightarrow$ le coordinate del centro di massa (baricentro)

$$x_c = \frac{\int x dm}{m}$$

$$y_c = \frac{\int y dm}{m}$$

$$z_c = \frac{\int z dm}{m}$$

se materiale omogeneo $\rightarrow \rho$ costante $\rightarrow$ le coordinate del centro di volume

$$x_c = \frac{\int x dV}{V}$$

$$y_c = \frac{\int y dV}{V}$$

$$z_c = \frac{\int z dV}{V}$$

PROPRIETÀ' DEL BARICENTRO

- Il baricentro o centro di massa di due corpi assimilabili a punti materiali, si trova sul segmento che li congiunge e divide questo in parti inversamente proporzionali alle masse dei punti materiali. Assunto come origine il baricentro e indicando con r_1, r_2 la posizione dei due punti, si ha:

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

- Se il corpo si estende su un piano o lungo una retta, il baricentro appartiene al piano o alla retta.
- Se il corpo ammette un piano di simmetria materiale, il baricentro si trova su tale piano.
- Se il corpo ammette due piani di simmetria materiale e dunque la loro intersezione è asse di simmetria materiale. Il baricentro si trova su tale asse. Se inoltre esistono tre piani di simmetria materiale, il loro punto di intersezione è centro di simmetria materiale. Il baricentro coincide con tale punto. Il baricentro di un corpo omogeneo che ha forma di poligono o poliedro regolare, coincide col centro geometrico della figura.
- Il baricentro gode della proprietà distributiva. Se il corpo viene suddiviso in due o più parti e di ognuna di queste viene determinato il baricentro, ivi ritenendo localizzata la massa di ciascuna parte, il baricentro dell'intero corpo coincide con quello dei punti materiali così ottenuti.
- Se un corpo omogeneo presenta delle cavità, il baricentro si ottiene attribuendo al corpo densità ρ costante e alle cavità la densità fittizia $-\rho$ (es. 2D: geometrie in cui sono presenti fori).

Se omettiamo la densità e ci focalizziamo su aspetti prettamente geometrici meglio usare il termine centroide.

CENTROIDE DI UN'AREA

Partendo da:

$$x_c = \frac{\int x dV}{V}$$

$$y_c = \frac{\int y dV}{V}$$

$$z_c = \frac{\int z dV}{V}$$

Considero una lastra piana con spessore t e densità ρ costanti (posso trascurare t).

Coordinate del centroide:

$$x_c = \frac{\int x dA}{A} \quad y_c = \frac{\int y dA}{A} \quad \text{se } t \rightarrow 0 \Rightarrow z_c = 0$$

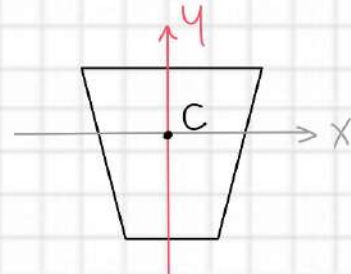
Il centroide di una sezione piana giace nel piano di sezione.

Momenti statici (momento di primo ordine o primo momento di inerzia) dell'area A rispetto agli assi [L^3]:

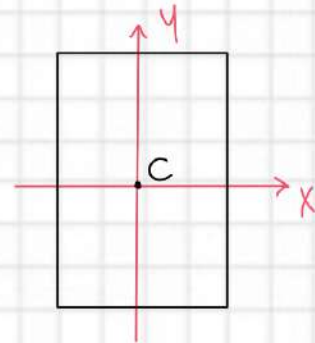
- $S_y: \int_A x dA$
- $S_x: \int_A y dA$
- $x_c = \frac{S_y}{A}$
- $y_c = \frac{S_x}{A}$

I momenti statici di un'area rispetto agli assi che passano per il suo centroide sono nulli.

Se esiste un'asse di simmetria, essa semplifica l'identificazione del centroide.



Se ci sono due assi di simmetria il centroide si trova facendo l'intersezione dei due assi.



MOMENTO DI INERZIA

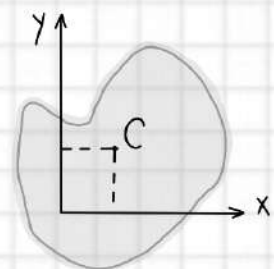
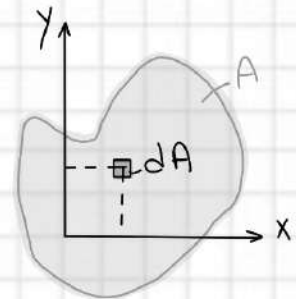
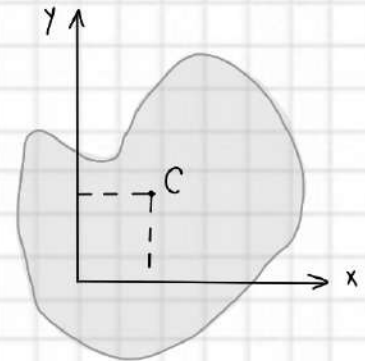
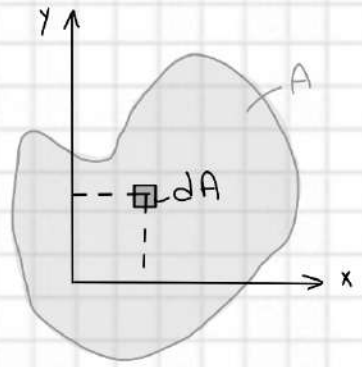
Momenti di inerzia o momento del II ordine dell'area A rispetto agli assi:

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

Momenti di inerzia centrifugo o misto:

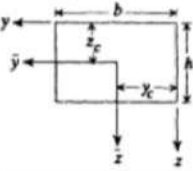
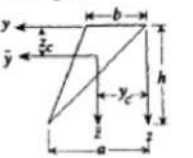
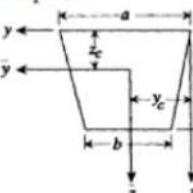
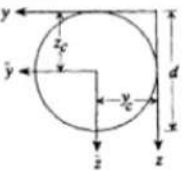
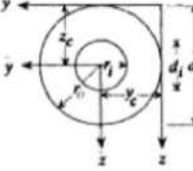
$$I_{xy} = \int_A xy dA$$



PROPRIETA':

Si definiscono assi principali di inerzia 1 e 2 le coppie di assi ortogonali per i quali $I_{xy} = 0$. I momenti di inerzia rispetto a questi assi vengono definiti momenti principali di inerzia.

PROPRIETA' GEOMETRICHE DELLE SEZIONI PIANE

Shape of Section	Area, Location of Centroid (y_c, z_c)	Moments of Inertia and the Polar Moment of Inertia ($J_x = I_y + I_z$) with Respect to Centroidal Axial Axis	Transverse Radii of Gyration and the Polar Radius of Gyration $r_p =$
1. Rectangle 	$A = bh$ $y_c = \frac{1}{2}b$ $z_c = \frac{1}{2}h$	$I = I_y = \frac{1}{12}bh^3$ $I_z = \frac{1}{12}hb^3$ $I_{yz} = 0$ $J_x = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$	$r_y = h/\sqrt{12}$ $r_z = b/\sqrt{12}$ $r_p = \sqrt{\frac{1}{12}(b^2 + h^2)}$
2. Triangle 	$A = \frac{1}{2}bh$ $y_c = \frac{1}{3}(a + b)$ $z_c = \frac{1}{3}h$	$I = I_y = \frac{1}{36}bh^3$ $I_z = \frac{1}{36}bh(b^2 - ab + a^2)$ $I_{yz} = \frac{1}{72}bh^2(2a - b)$ $J_x = \frac{1}{36}bh(h^2 + b^2 - ab + a^2)$	$r_y = h/\sqrt{18}$ $r_z = \left[\frac{1}{18}(b^2 - ab + a^2)\right]^{1/2}$ $r_p = \sqrt{\frac{1}{18}(b^2 + h^2 - ab + a^2)}$
3. Trapezoid 	$A = \frac{1}{2}h(a + b)$ $y_c = \frac{1}{2}a$ $z_c = \frac{h}{3} \frac{a + 2b}{a + b}$	$I = I_y = \frac{h^3}{36} \frac{a^2 + 4ab + b^2}{a + b}$ $I_z = \frac{1}{48}h(a + b)(a^2 + b^2)$ $I_{yz} = 0$ $J_x = I_y + I_z$	$r_y = \frac{h(a^2 + 4ab + b^2)^{1/2}}{\sqrt{18}(a + b)}$ $r_z = \left[\frac{1}{24}(a^2 + b^2)\right]^{1/2}$ $r_p = \sqrt{J_x/A}$
4. Circle 	$A = \frac{1}{4}\pi d^2$ $y_c = \frac{1}{2}d$ $z_c = \frac{1}{2}d$	$I = I_y = I_z = \frac{1}{64}\pi d^4$ $I_{yz} = 0$ $J_x = \frac{1}{32}\pi d^4$	$r_y = r_z = \frac{1}{4}d$ $r_p = d/\sqrt{8}$
5. Annulus 	$A = \frac{1}{4}\pi(d_o^2 - d_i^2)$ $y_c = \frac{1}{2}d_o$ $z_c = \frac{1}{2}d_o$	$I = I_y = I_z = \frac{1}{4}\pi(r_o^4 - r_i^4)$ $I_{yz} = 0$ $J_x = \frac{1}{32}\pi(d_o^4 - d_i^4)$	$r_y = r_z = \frac{1}{4}(d_o^2 + d_i^2)^{1/2}$ $r_p = \sqrt{\frac{1}{8}(d_o^2 + d_i^2)}$

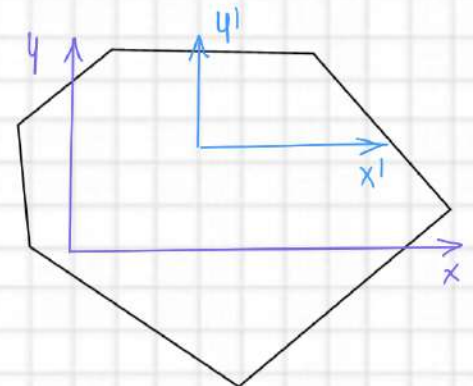
MOMENTI DI INERZIA ASSIALI RISPETTO AD ASSI PARALLELI

Formula del trasporto:

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int y^2 dA \\
 I_x &= \int (y' \pm d)^2 dA \\
 &= \int y'^2 dA + d^2 \int dA \pm 2d \int y' dA \\
 &= I_{x'} + d^2 A
 \end{aligned}$$

$y = y' \pm d$

$S_{x'}$



VETTORI - NOTAZIONE INTRINSECA

- Forze che agiscono su un punto materiale $\rightarrow \mathbf{f}$
- Posizione di un punto materiale $\rightarrow \mathbf{x}$

Entrambe queste rappresentazioni esistono indipendentemente dall'osservatore che li descrive.

OSS: il vettore è una quantità con un significato intrinseco che è indipendente dall'osservatore o dal sistema di riferimento.

Il vettore è una quantità definita da una ampiezza, da una direzione e da un verso.

Il vettore è una classe di equivalenza (freccie uguali rappresentano vettori uguali).

- vantaggio della notazione intrinseca: non è necessario un sistema di riferimento.
- svantaggio della notazione intrinseca: è poco agevole nel momento in cui si vogliono fare operazioni con i vettori.

OPERAZIONI DI BASE**SOMMA DI VETTORI**

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

- Considero il vettore $\mathbf{b}$ che parte dalla punta del vettore $\mathbf{a}$.
- $\mathbf{c}$ è il vettore che ha la coda che coincide con la coda del vettore $\mathbf{a}$ e la testa che coincide con la testa del vettore $\mathbf{b}$.

PRODOTTO DI UN VETTORE CON UNO SCALARE

$$\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a}$$

Il vettore $\mathbf{c}$ ha la stessa direzione di $\mathbf{a}$, stesso verso di $\mathbf{a}$ se $\alpha > 0$ altrimenti ha verso opposto; l'ampiezza è data da:

$$\|\mathbf{c}\| = \alpha \|\mathbf{a}\| \quad \rightarrow \text{equazione scalare}$$

PRODOTTO SCALARE TRA VETTORI

$$\gamma = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

E' definito da:

$$\gamma = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos \theta$$

VETTORI - NOTAZIONE INDICIALE

- Forze che agiscono su un punto materiale $\rightarrow \mathbf{f}_i$
- Posizione di un punto materiale $\rightarrow \mathbf{x}_j$

La notazione indiciale è caratterizzata dalla presenza di indici; i e j sono indici liberi: possono assumere qualsiasi valore all'interno di un determinato range.

Per spiegare il significato di f_i e x_j introduciamo un insieme di vettori base $\mathbf{e}$ (versori ortonormali tra loro); in ogni caso f_i e x_j sono ancora delle quantità indipendenti dall'osservatore.

$$f_i = f \cdot \mathbf{e}_i \rightarrow \text{è uno scalare che rappresenta la componente del vettore } f \text{ rispetto alla } i\text{-esima base}$$

OPERAZIONI DI BASE

SOMMA DI VETTORI

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \Leftrightarrow c_i = a_i + b_i$$

PRODOTTO DI UN VETTORE CON UNO SCALARE

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} \Leftrightarrow c_i = \lambda a_i$$

PRODOTTO SCALARE TRA VETTORI

$$\gamma = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \Leftrightarrow \gamma = a_i b_i$$

Nella notazione indiciale si introduce una convenzione sulla sommatoria $\rightarrow$ gli indici ripetuti implicano che c'è una sommatoria rispetto all'intervallo ammissibile degli indici stessi.

Vediamo degli esempi:

$$1. a_i b_i \equiv \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$2. T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

$$3. a_{i,j} = \frac{da_i}{dx_j} = \frac{da_1}{dx_1} + \frac{da_2}{dx_2} + \frac{da_3}{dx_3} \quad \begin{array}{l} \text{indici ripetuti} \rightarrow \text{sommatoria} \\ \text{virgola} \rightarrow \text{operazione di derivazione} \end{array}$$

In un prodotto, gli indici non ripetuti sono detti indici liberi; gli indici ripetuti sono detti indici di comodo.

ES:

$$d = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \rightarrow d_j = a_i b_i c_j$$

REGOLE

- Lettere associate a indici di comodo possono essere cambiate senza problemi.

$$a_i b_i c_m = a_k b_k c_m$$

- Lettere associate a indici liberi possono essere cambiate senza problemi.

$$a_i b_i c_l = a_k b_k c_l$$

- Gli indici non possono essere ripetuti più di due volte in un prodotto.

$$\cancel{a_k b_k c_k}$$

- Le equazioni in notazione indiciale devono essere valide per tutti gli indici liberi.

$$a_i b_i c_m = a_k b_k c_m \neq a_k b_k c_f$$

VETTORI - NOTAZIONE INGEGNERISTICA

- Forze che agiscono su un punto materiale $\rightarrow \{f\} = \{f_x, f_y, f_z\}^T$
- Posizione di un punto materiale $\rightarrow \{x\} = \{x, y, z\}^T$

Nella notazione ingegneristica vengono espresse in maniera esplicita tutte le componenti rispetto a una base canonica con un sistema di riferimento (O, X, Y, Z) .

OPERAZIONI DI BASE

SOMMA DI VETTORI

$$c = a + b \Leftrightarrow c_i = a_i + b_i \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

PRODOTTO DI UN VETTORE CON UNO SCALARE

$$c = \alpha a \Leftrightarrow c_i = \alpha a_i \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{Bmatrix}$$

PRODOTTO SCALARE TRA VETTORI

$$\gamma = a \cdot b \Leftrightarrow \gamma = a_i b_i \Leftrightarrow \gamma = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

OPERAZIONI COMPLESSE - PRODOTTO TRA VETTORI

- prodotto scalare $a \cdot b$
- prodotto vettoriale $a \times b$
- prodotto tensoriale $a \otimes b$

PRODOTTO SCALARE

Notazione compatta

$$a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos(\theta[a, b])$$

Notazione indiciale

$$a \cdot b = \left(\sum_{i=1}^3 a_i e_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 a_j e_j \right) = (a_i e_i) \cdot (b_j e_j) = a_i b_j (e_i \cdot e_j)$$

$$= a_i b_j \delta_{ij} = a_1 b_1 \delta_{11} + \cancel{a_1 b_2 \delta_{12}} + \cancel{a_1 b_3 \delta_{13}} + \cancel{a_2 b_1 \delta_{21}} + a_2 b_2 \delta_{22} + \cancel{a_2 b_3 \delta_{23}} + \cancel{a_3 b_1 \delta_{31}} + \cancel{a_3 b_2 \delta_{32}} + a_3 b_3 \delta_{33}$$

delta di Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i$$

Notazione ingegneristica

$$\{a\} \cdot \{b\} = \{a\}^T \{b\} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

PRODOTTO VETTORIALE

Notazione compatta

$$a \times b = c$$

Notazione indiciale

$$a \times b = (a_i e_i) \times (b_j e_j) = a_i b_j (e_i \times e_j) = a_i b_j \epsilon_{ijk} e_k$$

simbolo alternatore di Ricci

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } ijk \text{ distinti} \\ & \text{ordinati} \\ -1 & \text{se } ijk \text{ distinti} \\ & \text{non ordinati} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Notazione ingegneristica

$$\{a\} \times \{b\} = \begin{Bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{Bmatrix}$$

Tensore: quantità con un significato fisico intrinseco, indipendente dal sistema di riferimento. Si tratta di un operatore lineare che trasforma vettori in vettori.

$$S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad Sa = b \quad a, b \in \mathbb{R}^3$$

PRODOTTO TENSORIALE

Notazione compatta

$$[a \otimes b] c = (b \cdot c) \cdot a \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ direzione di } a \\ \bullet \text{ modulo dato da: } (b \cdot c) ||a|| \\ \bullet \text{ verso che dipende da } b \cdot c \end{array} \right.$$

Notazione indiciale

vettori delle basi $\rightarrow$ 3 componenti e_1, e_2, e_3

tensore del secondo ordine $\rightarrow$ 9 componenti $e_i \otimes e_j$

$$S = \sum_{i,j=1}^3 S_{ij} e_i \otimes e_j = S_{ij} e_i \otimes e_j$$

componenti del tensore S

Vogliamo capire che cos'è S_{ij} ; in generale:

$$T_{ab} = e_a (T e_b)$$

$$= e_a T_{ij} (e_i \otimes e_j) e_b$$

$$\text{so che } T = T_{ij} e_i \otimes e_j$$

$$\text{so che } (a \otimes b) c = (b \cdot c) a$$

$$e_a T_{ij} (e_i \otimes e_j) e_b = e_a T_{ij} \underbrace{(e_j \cdot e_b)}_{\delta_{jb}} e_i = T_{ij} \underbrace{e_a e_i}_{\delta_{ai}} \delta_{jb}$$

$$\Rightarrow T_{ij} \delta_{ai} \delta_{jb}$$

Guardo $T_{ij} \delta_{ai}$ sopravvivono i termini quando $i = a \Rightarrow$ ottengo T_{aj}

Guardo $T_{aj} \delta_{jb}$ sopravvivono i termini quando $j = b \Rightarrow$ ottengo T_{ab}

Notazione ingegneristica

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$

ARTICOLAZIONI

Le articolazioni danno mobilità al sistema muscolo-scheletrico.

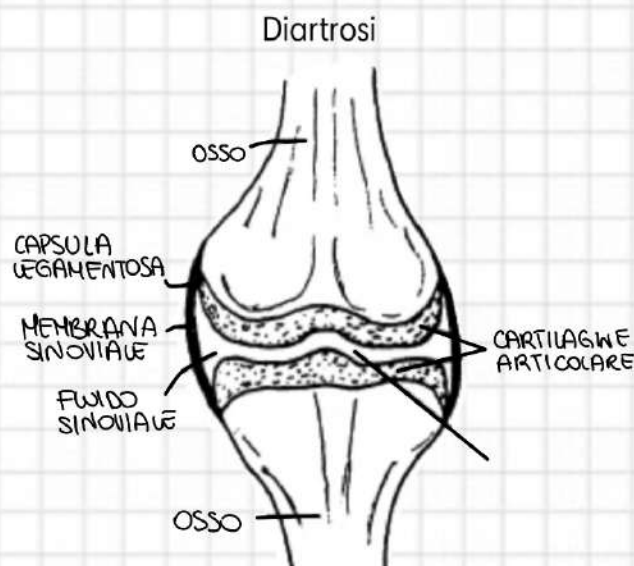
Classificazione:

- Sinartrosi (articolazioni fisse): caratterizzate da un incastro reciproco di superfici ossee dentellate e rugose (es. ossa del cranio), sono le più semplici e sono anche dette suture.
- Anfiartrosi (articolazioni poco mobili): caratterizzate dalla presenza di legamenti inter-ossei, che permettono limitati movimenti (es. le articolazioni dei corpi vertebrali).
- Diartrsi (articolazioni molto mobili): sono tutte le articolazioni degli arti e presentano superfici articolari di varia forma, hanno struttura complessa.

MUSCOLI

Sono composti da:

- capsula legamentosa: ha il ruolo di garantire una stabilità,
- membrana e fluido sinoviale: minimizzano l'attrito tra le due parti delle articolazioni,
- cartilagini: supportano le interfacce tra le ossa, assorbono gli urti e tende a logorarsi nel tempo (es. artrite).



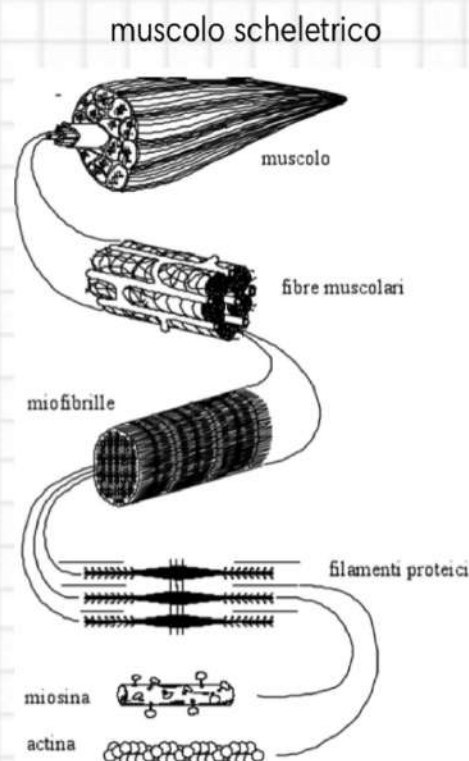
I muscoli azionano il movimento convertendo l'energia chimica in lavoro meccanico.

Classificazione:

- lisci (muscolatura stomaco, intestino, vasi sanguigni),
- scheletrici,
- cardiaco

Dal punto di vista meccanico si distingue una risposta:

- Passiva di tipo visco-elastica → la risposta dipende dalla velocità di carico ed è in grado di tornare alla configurazione iniziale senza deformazione residua.
- Attiva guidata dal sistema nervoso. Si hanno diversi tipi di contrazione:
 - concentrica: occorre simultaneamente, all'accorciamento del muscolo (es. bicipite durante la flessione dell'avambraccio),
 - statica: occorre a lunghezza muscolare costante (es. bicipite quando l'avambraccio è flesso e si mantiene fisso),



- eccentrica: occorre quando la lunghezza muscolare aumenta (es. bicipite durante l'estensione dell'avambraccio).

Si possono classificare i muscoli in base alla funzione svolta durante una particolare attività:

- agonisti,
- antagonisti,
- sinergici.

APPLICAZIONI DELLA STATICA ALLA BIOMECCANICA

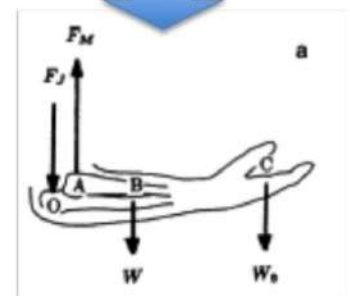
Vogliamo conoscere la forza esercitata dal muscolo (F_m) e dall'articolazione (F_j) in funzione del peso del braccio (W), del peso del bilanciere (W_o) e della lunghezza dell'avambraccio (AB).

Classificazione delle forze in gioco:

- interne: associate a muscoli, legamenti, tendini e articolazioni (incognite),
- esterne: gravità, pesi sostenuti, azioni di protesi/macchinari (dati).

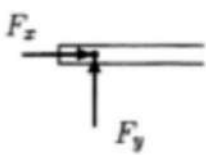
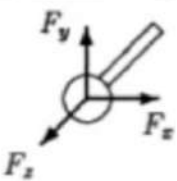
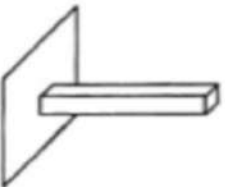
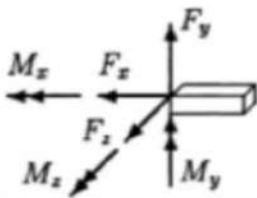
Ipotesi:

- conosciamo l'asse anatomico di rotazione dell'articolazione,
- conosciamo il punto di attacco dei muscoli,
- conosciamo la direzione di azione del muscolo teso,
- conosciamo peso e centro di massa delle parti anatomiche sotto esame,
- trascuriamo le forze di attrito,
- non consideriamo effetti dinamici,
- realtà 3D $\rightarrow$ analisi 2D.



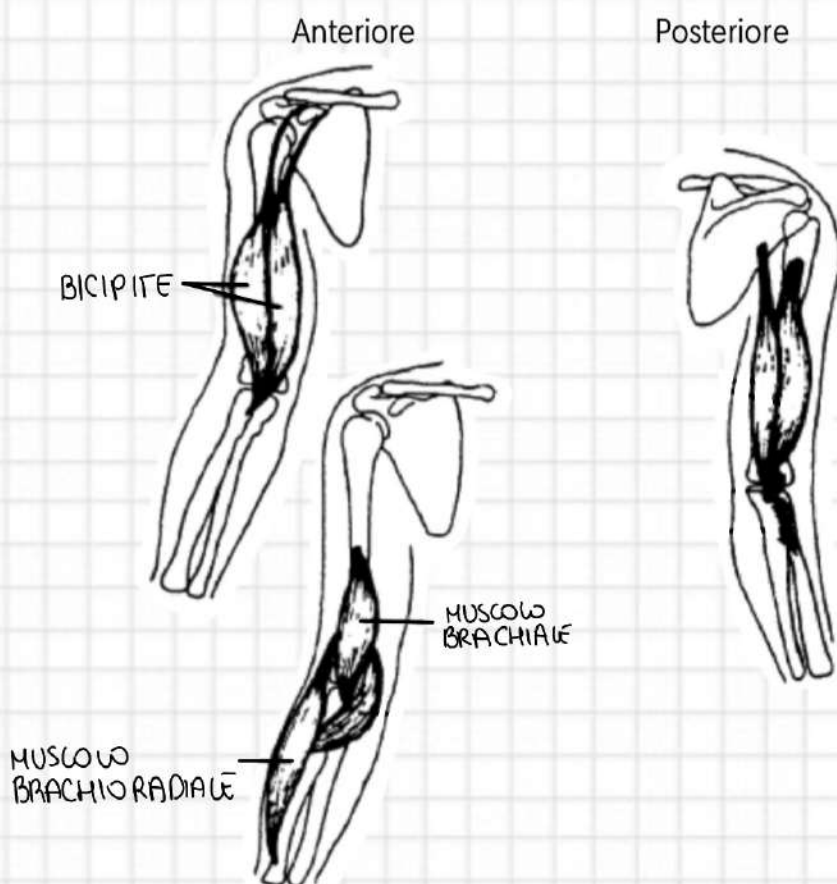
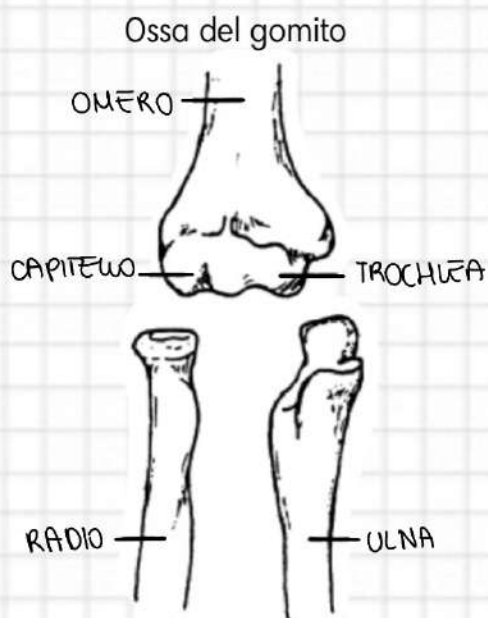
MODELLIZZAZIONE VINCOLI ARTICOLAZIONI MUSCOLI

TYPE OF SUPPORT OR JOINT	SAMPLE GRAPHICAL REPRESENTATIONS	REPRESENTATIONS FOR USE IN FREE-BODY DIAG.	BIOMECHANICS EXAMPLES	UNKNOWN
Flexible members (cables, ropes)			Muscles, ligaments 	Magnitude of the tension in the cable or muscle
Two-force members			Muscles 	Force magnitude

TYPE OF SUPPORT OR JOINT	SAMPLE GRAPHICAL REPRESENTATIONS	REPRESENTATIONS FOR USE IN FREE-BODY DIAG.	BIOMECHANICS EXAMPLES	UNKNOWN
Rollers and other simple supports (no friction)			Bone-to-bone contact 	Force magnitude
Hinge or pin connection			Elbow 	Magnitude and direction of force (force components)
Ball-and-socket			Hip 	Magnitude and direction of force
Fixed, welded, or built-in			Skull 	Magnitude and direction of force and moment

GOMITO: OSSA E MUSCOLI DELL' ARTICOLAZIONE

Riprendiamo a studiare il caso dell'atleta che allena il bicipite con il bilanciere; studiamo le forze interne:



Caso I

Gomito flesso ad angolo retto + oggetto posto sulla mano.

Ipotesi:

- bicipite è il maggiore muscolo flessore,
- la linea di azione del muscolo è verticale.

OSS: F_J è stata messa così perchè l'articolazione ha una azione antagonista a quella del muscolo.

Forze:

- W_o : peso oggetto,
- F_m : azione del bicipite,
- W : peso braccio,
- F_J : reazione vincolare dell'articolazione.

Punti:

- O: fulcro dell'articolazione,
- A: punto di attacco del bicipite sul radio,
- B: baricentro dell'avambraccio,
- C: punto di applicazione della forza legata al peso.

Equazioni di equilibrio:

$$\sum F_x = 0$$

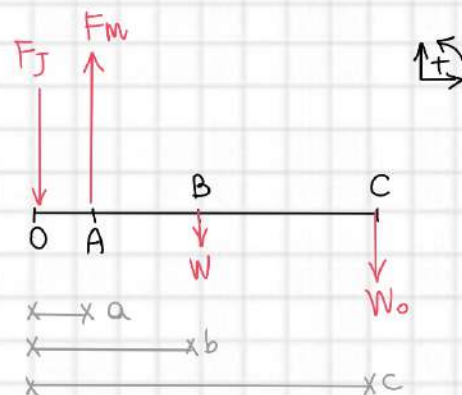
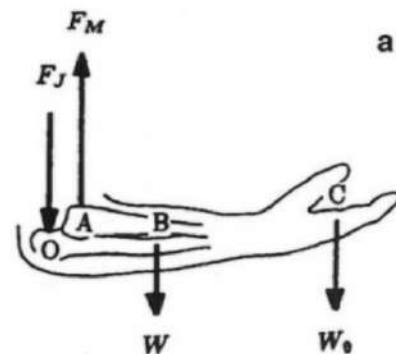
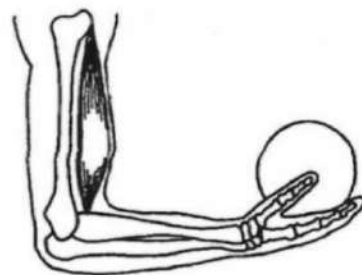
$$\sum F_y = 0 \quad -F_J + F_m - W - W_o = 0$$

$$\sum M_o = 0 \quad a F_m - b W - c W_o = 0$$

$$\Rightarrow F_m = \frac{1}{a} (b W + c W_o) = 775 \text{ N}$$

$$F_J = F_m - W - W_o = 675 \text{ N}$$

$\Rightarrow$ la forza esercitata dal bicipite è 10 volte il peso sostenuto.

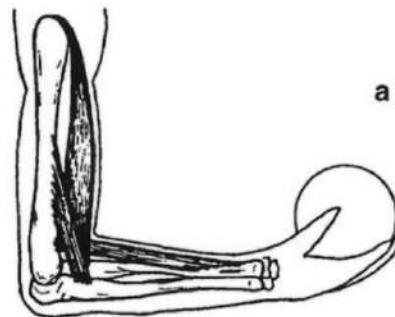


$$\begin{array}{ll} a = 4 \text{ cm} & W = 20 \text{ N} \\ b = 15 \text{ cm} & W_o = 90 \text{ N} \\ c = 35 \text{ cm} & \end{array}$$

Caso II

Forze:

- W_o : peso oggetto,
- F_{m1} : azione del bicipite,
- F_{m2} : azione del muscolo brachiale,
- F_{m3} : azione del muscolo brachioradiale,
- W : peso braccio,
- F_J : reazione vincolare dell'articolazione.



Equilibrio:

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{Jx} = F_{m1x} + F_{m2x} + F_{m3x}$$

$$\sum F_y = 0$$

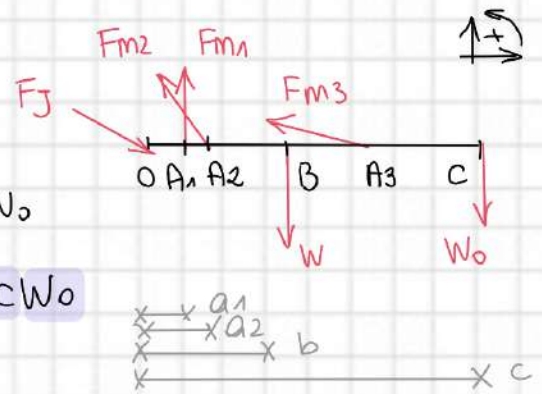
$$F_{Jy} = F_{m1y} + F_{m2y} + F_{m3y} - W - W_0$$

$$\sum M_0 = 0$$

$$a_1 F_{m1} + a_2 F_{m2} + a_3 F_{m3} = bW + cW_0$$

⇒ sistema irrisolvibile

DATI
INCOGNITE



Ipotesi: i muscoli esercitano una forza proporzionale alla loro sezione (S_i).

Posso scrivere F_{m2} e F_{m3} in funzione di F_{m1} attraverso i fattori k_{21} e k_{31} :

$$k_{21} = \frac{F_{m2}}{F_{m1}} = \frac{S_2}{S_1}$$

$$k_{31} = \frac{F_{m3}}{F_{m1}} = \frac{S_3}{S_1}$$

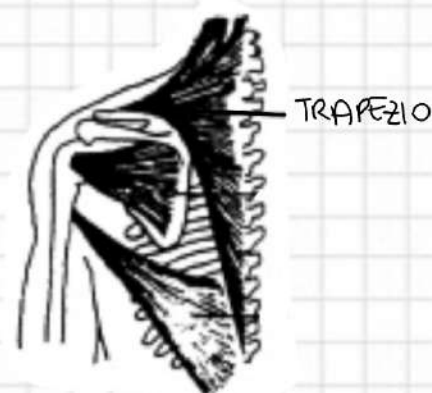
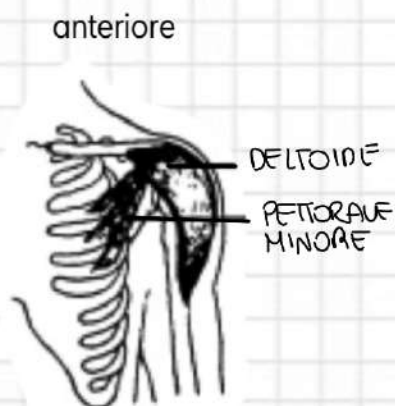
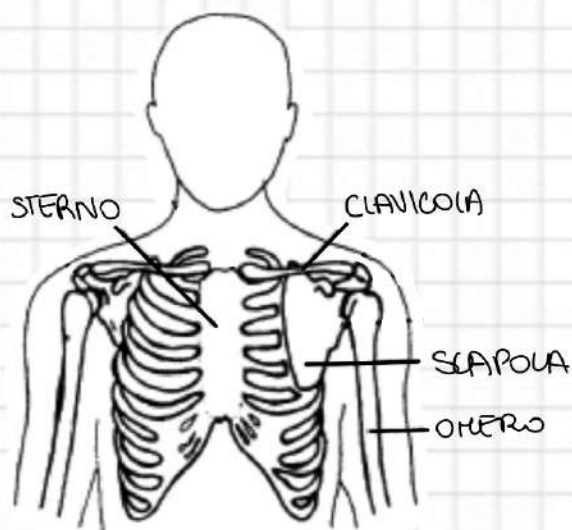
→ dati che non ho ma che posso cercare in un libro di anatomia (dati anatomici)

Si ottiene quindi:

$$F_{m1} = \frac{bW + cW_0}{a_1 + a_2 k_{21} + a_3 k_{31}}$$

Ricapitolando, abbiamo reso il modello più accurato ma è saltato fuori che non avevamo abbastanza dati. Per correggere tale situazione si cercano altre ipotesi che permettono di risolvere il sistema, come quella delle sezioni dei muscoli.

SPALLA: OSSA E MUSCOLI DELL'ARTICOLAZIONE



L'atleta solleva il bilanciere e tiene il braccio a 90° rispetto al torso.

Consideriamo l'azione del muscolo deltoide che grazie alla sua contrazione permette al braccio di stare in posizione orizzontale contrastando l'azione della forza peso del bilanciere (W_0) e quella del braccio (W).

Dati:

$$a = 15 \text{ cm}$$

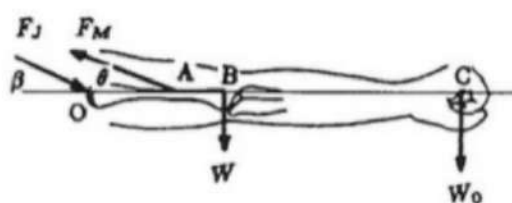
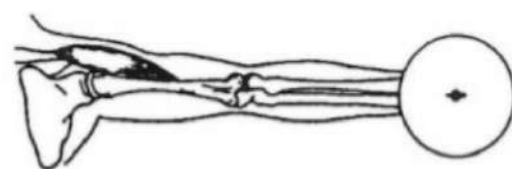
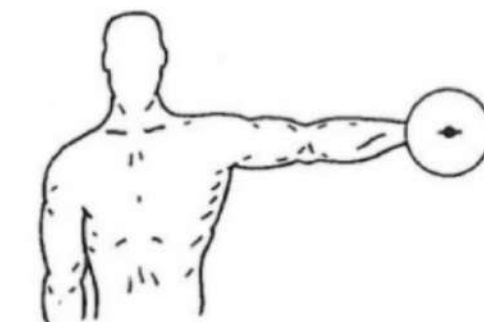
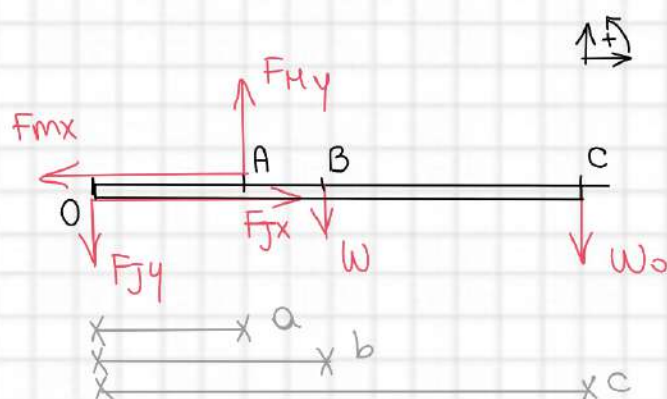
$$\theta = 15^\circ$$

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$W = 40 \text{ N}$$

$$c = 60 \text{ cm}$$

$$W_0 = 60 \text{ N}$$



Si ottiene:

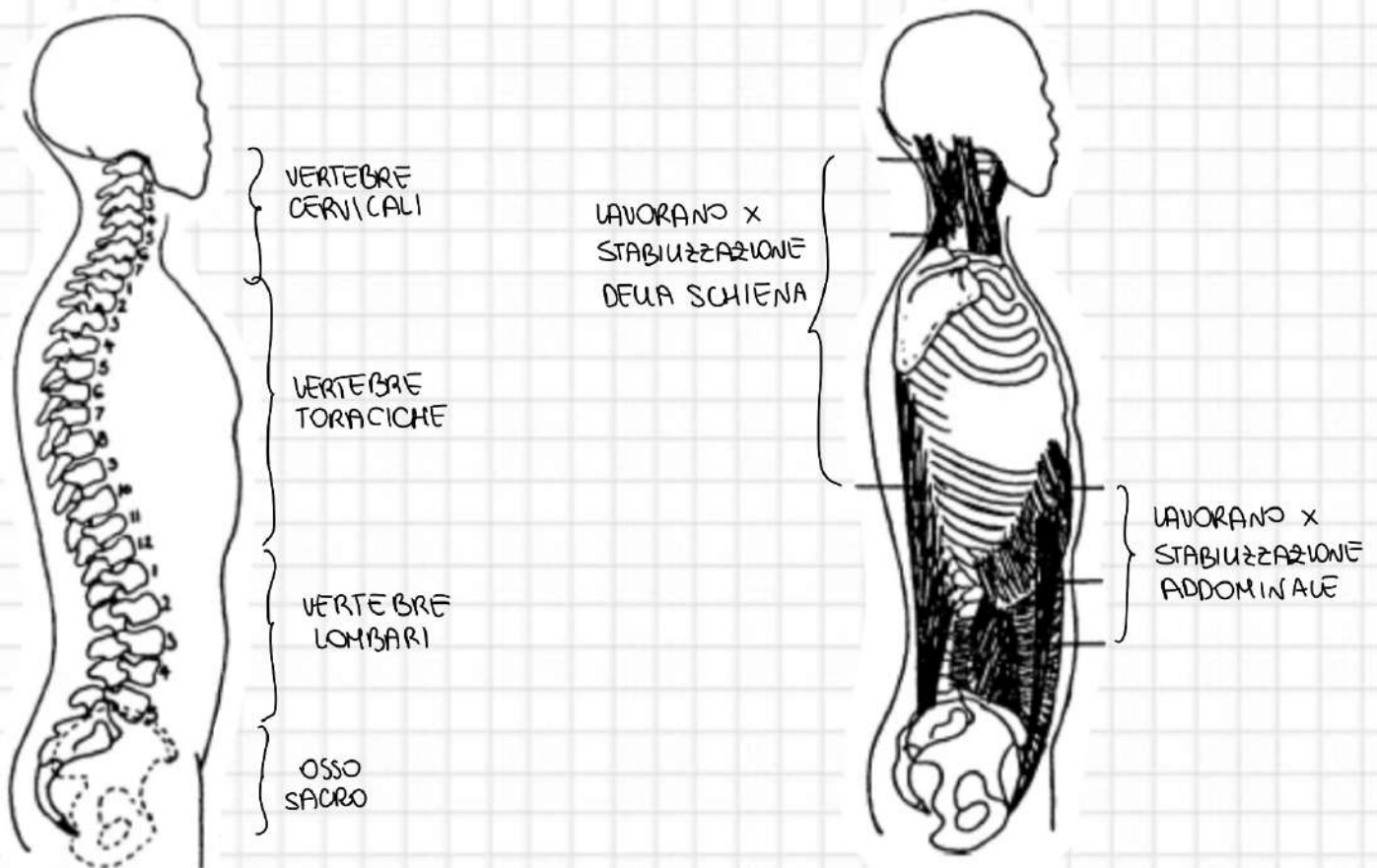
$$F_m = 1236 \text{ N}$$

$$F_j = 1214 \text{ N}$$

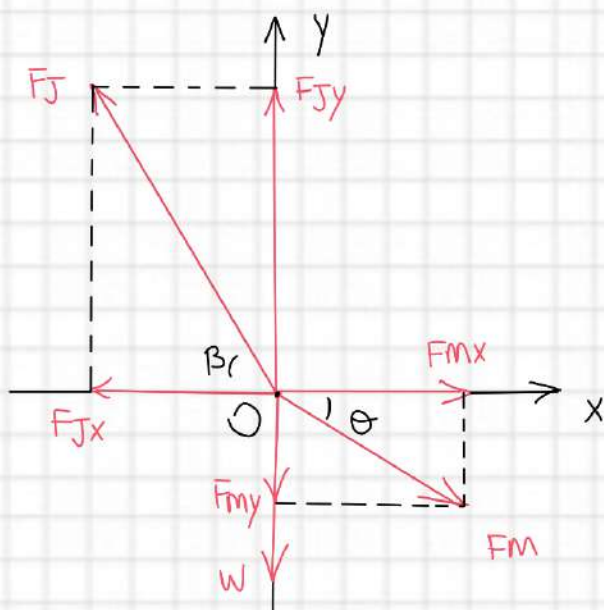
$$\beta = 10^\circ$$

- F_{mx} è circa 4 volte superiore a F_{my} e ha una azione stabilizzante rispetto all'articolazione.
- La forza esercitata dal deltoide è di circa 20 volte quello il peso sostenuto.

SCHIENA: SISTEMA VERTEBRALE E MUSCOLI



Studio la forza che esercita il muscolo del collo quando il capo è inclinato.



Dati:

$$W = 50 \text{ N}$$

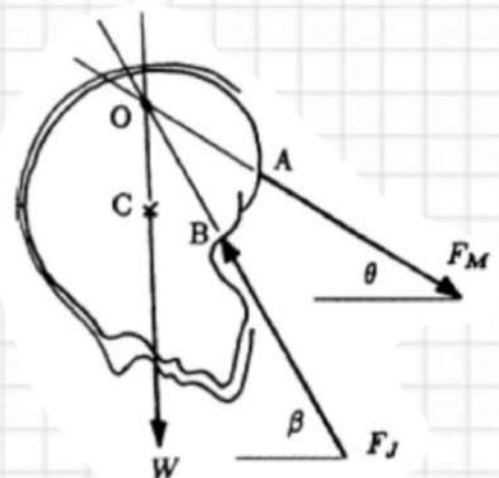
$$\theta = 30^\circ$$

$$\beta = 60^\circ$$

Si ottiene:

$$F_m = 50 \text{ N}$$

$$F_j = 86 \text{ N}$$



L'atleta solleva un peso piegato di un'angolo θ rispetto alla verticale.

Forze:

- W_0 : peso manubrio,
- W_1 : peso delle gambe (bacino incluso),
- W : peso atleta,
- F_m : azione muscoli della schiena,
- F_j : reazione vincolare della schiena.

Equilibrio:

$$\sum F_x = 0 \quad F_{mx} - F_{jx} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{my} - F_{jy} - W_1 + (W + W_0) = 0$$

$$\sum M_0 = 0 \quad a F_m + b W_1 - c (W + W_0) = 0$$

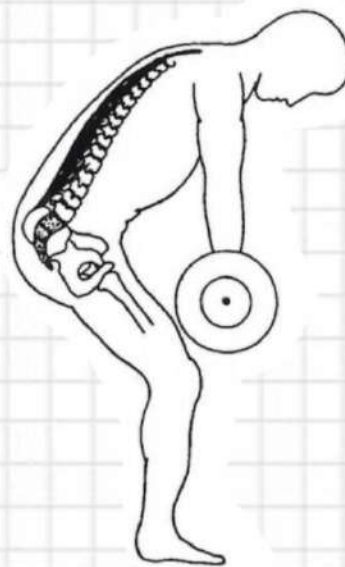
$$\Rightarrow F_m = \frac{c(W + W_0) - b W_1}{a}$$

$$= 10,4 W$$

$$F_j = 11,7 W$$

- I muscoli della schiena esercitano una forza 10 volte il peso dell'atleta.
- La forza che deve sostenere la schiena (osso sacro / V vertebra) è 12 volte il peso dell'atleta.

per
 $\theta = 45^\circ$



$$a = 0,02 h$$

$$b = 0,08 h$$

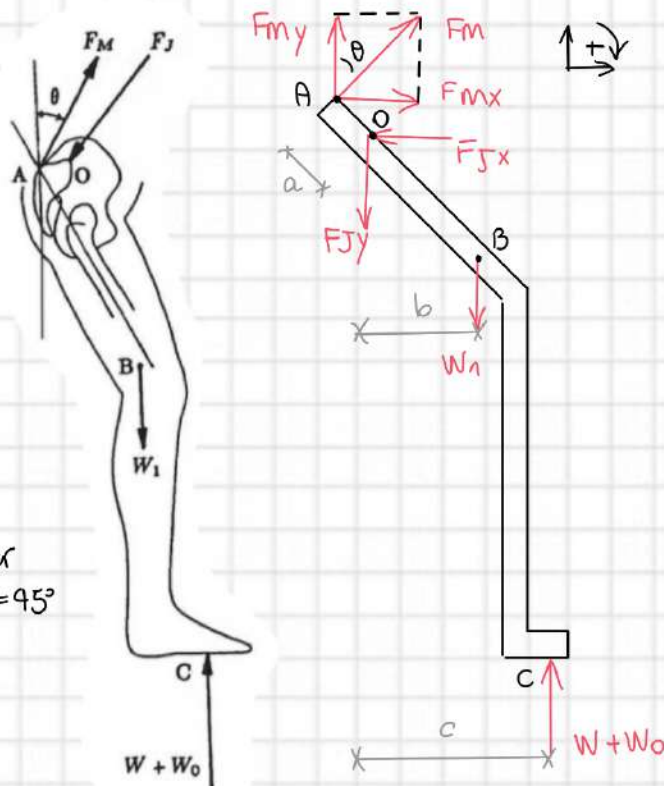
$$c = 0,12 h$$

altezza
atleta

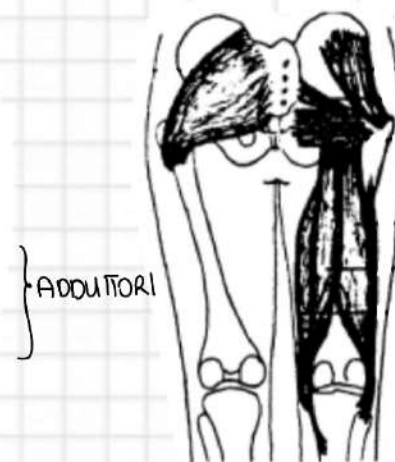
$$\theta = 45^\circ$$

$$W = W_0$$

$$W_1 = 0,4 W$$



ANCA: BACINO MUSCOLI E OSSA PELVICHE



Appoggio monopodalico sulla gamba destra.

Forze:

- W_1 : peso della gamba,
- W : peso del corpo,
- F_m : azione dei muscoli adduttori del bacino,
- F_j : reazione vincolare del bacino,
- θ : inclinazione del muscolo rispetto all'orizzontale.

Dati:

- h : altezza atleta
- $a = 0.05h$
- $b = 0.2h$
- $c = 0.52h$
- $\alpha = 45^\circ$
- $\beta = 80^\circ$
- $\theta = 70^\circ$
- $W = 0.17W$

Equilibrio:

$$\sum F_x = 0 \quad F_{jx} = F_{mx} = F_m \cos \theta$$

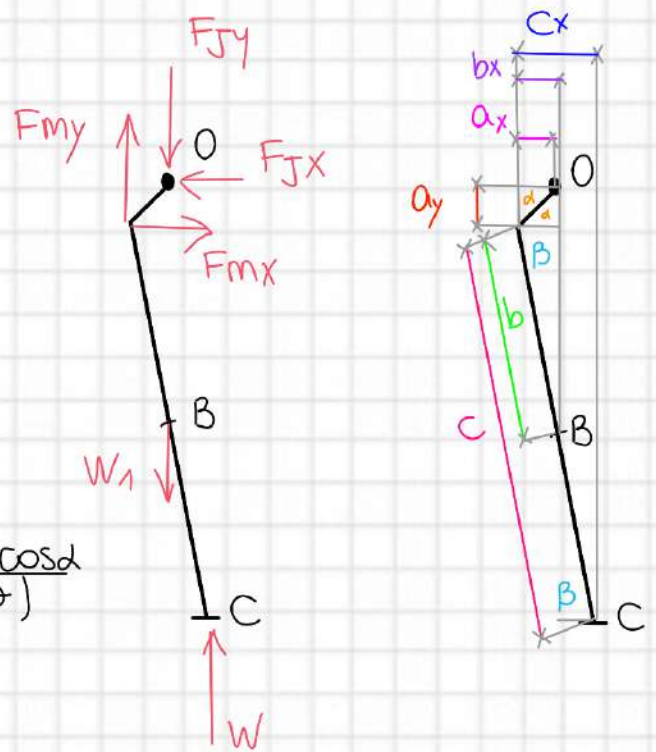
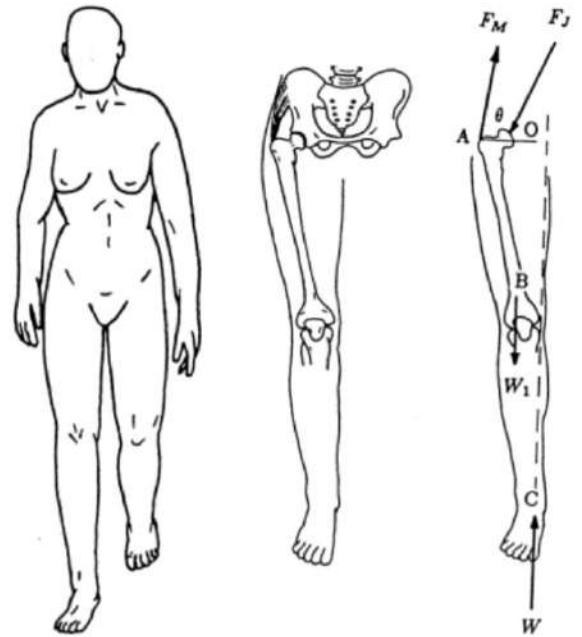
$$\sum F_y = 0 \quad F_{jy} = F_m \sin \theta + W - W_1$$

$$\sum M_O = 0 \quad F_m = \frac{(cW - bW_1) \cos \beta - a(W - W_1) \cos \alpha}{a(\cos \alpha \sin \theta - \sin \alpha \cos \theta)}$$

$$\Rightarrow F_m = 2,6 W$$

$$F_j = 3,4 W$$

$$\phi = \arctan \left(\frac{F_{jy}}{F_{jx}} \right) = 79,8^\circ \quad \rightarrow \text{angolo di inclinazione della reazione } F_j$$



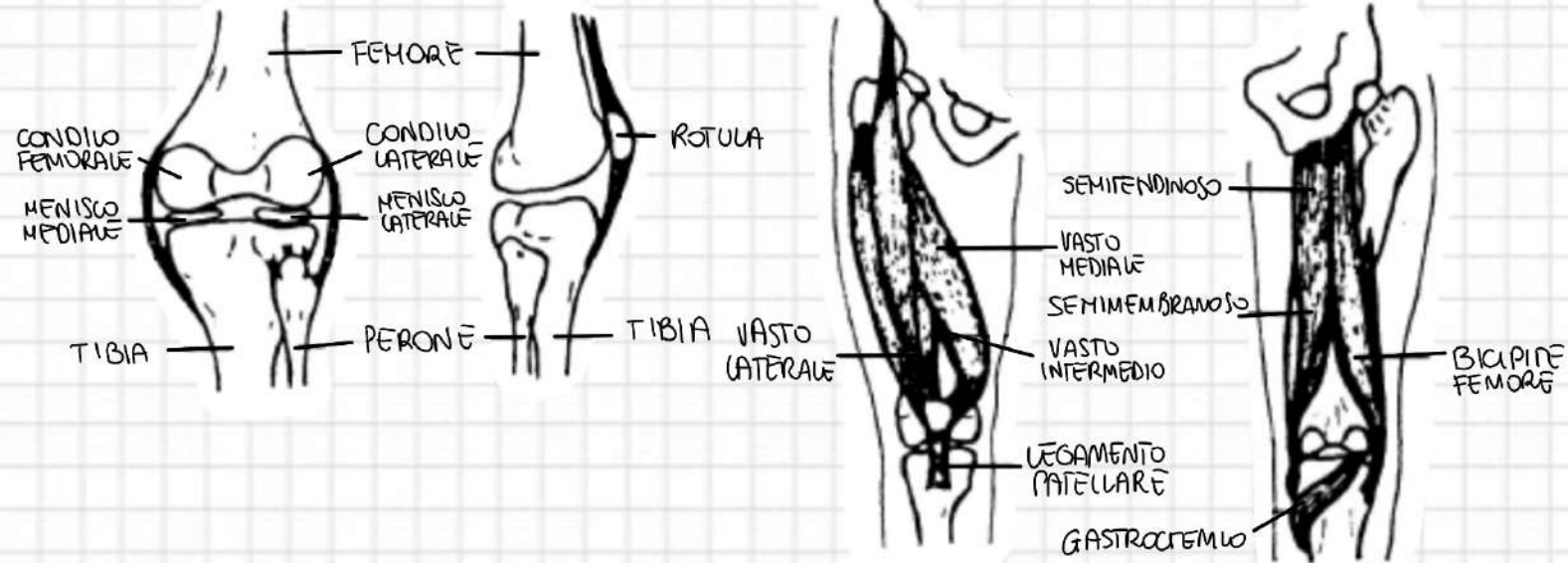
GINOCCHIO: MUSCOLI E TENDINI DELL'ARTICOLAZIONE

posteriore

laterale

anteriore

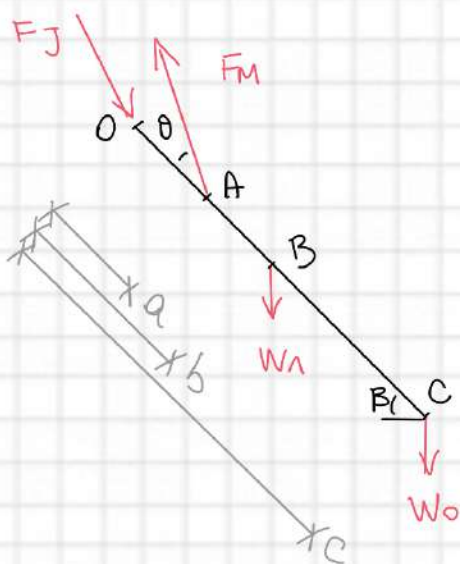
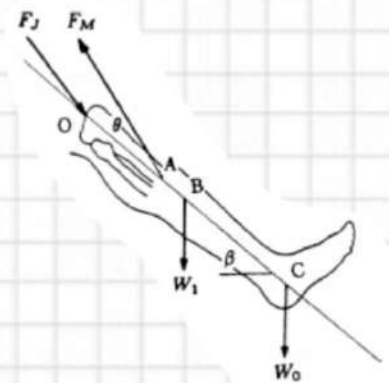
posteriore



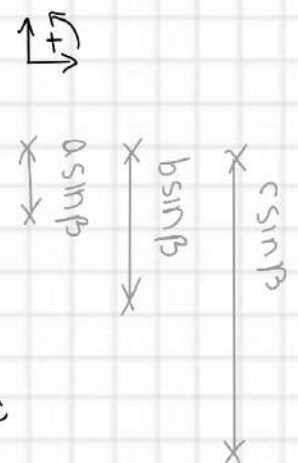
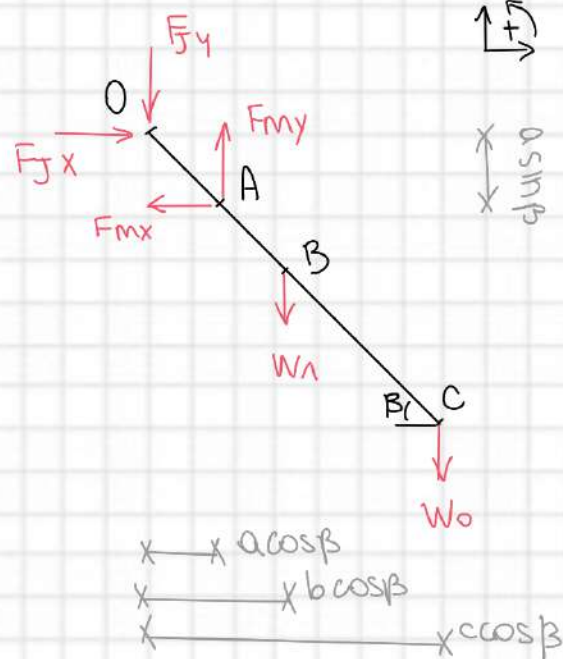
Atleta allena i quadricipiti con una cavigliera.

Dati:

- $a = 12 \text{ cm}$
- $b = 22 \text{ cm}$
- $c = 50 \text{ cm}$
- $W_1 = 150 \text{ N}$
- $W_0 = 100 \text{ N}$
- $\theta = 15^\circ$
- $\beta = 45^\circ$



|||



Equilibrio alla rotazione (polo O):

$$a \cos(\beta) F_{my} - a \sin(\beta) F_{mx} - b \cos(\beta) W_1 - c \cos(\beta) W_0 = 0$$

$$a \cos(\beta) F_{my} - a \sin(\beta) F_{mx} = b \cos(\beta) W_1 + c \cos(\beta) W_0$$

$$\begin{aligned} F_{mx} &= F_m \cos(\theta + \beta) \\ F_{my} &= F_m \sin(\theta + \beta) \end{aligned}$$

$$F_m \cdot a [\cos \beta \sin(\theta + \beta) - \sin \beta \cos(\theta + \beta)] = b \cos(\beta) W_1 + c \cos(\beta) W_0$$

$$F_m a \sin(\theta + \beta - \beta) = b \cos(\beta) W_1 + c \cos(\beta) W_0$$

$$F_m a \sin(\theta) = b \cos(\beta) W_1 + c \cos(\beta) W_0$$

$$\begin{aligned} F_m &= \frac{W_1 b \cos(\beta) + W_0 c \cos(\beta)}{a \sin \theta} \\ &= (W_1 b + W_0 c) \frac{\cos(\beta)}{a \sin \theta} \end{aligned}$$

Riprendiamo a parlare di notazione.

TENSORE DEL SECONDO ORDINE - OPERAZIONI

APPLICAZIONE DEL TENSORE SU UN VETTORE

Notazione compatta

$$b = S a$$

Notazione indiciale

$$b_i = S_{ij} a_j$$

Notazione ingegneristica

$$\{b\} = [S] \{a\} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{11} a_1 + S_{12} a_2 + S_{13} a_3 \\ S_{21} a_1 + S_{22} a_2 + S_{23} a_3 \\ S_{31} a_1 + S_{32} a_2 + S_{33} a_3 \end{Bmatrix}$$

MOLTIPLICAZIONE TRA TENSORI

Notazione compatta

$$(TS)a = T(Sa) \quad \neq \quad (ST)a = S(Ta)$$

Notazione indiciale

$$(TS)_{ij} = T_{im} S_{mj}$$

$$\begin{aligned} e_i (TS) e_j &= e_i [T (S_{kl} e_k \otimes e_l) e_j] \\ &= S_{kl} \cdot e_i [(e_l e_j) T e_k] \\ &= S_{kl} \delta_{lj} e_i \cdot T_{mn} (e_m \otimes e_n) e_k \\ &= T_{mn} S_{kj} \underbrace{(e_i e_m)}_{\delta_{im}} \underbrace{(e_n e_k)}_{\delta_{nk}} \\ &= T_{ik} S_{kj} \end{aligned}$$

RICORDA

$$N = N_{ab} e_a \otimes e_b$$

$$N_{ab} = e_a (N e_b)$$

Notazione ingegneristica

$$[TS] = \begin{bmatrix} T_{11}S_{11} + T_{12}S_{21} + T_{13}S_{31} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ T_{11}S_{13} + T_{12}S_{23} + T_{13}S_{33} & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

TENSORE IDENTITA'

Tensore che trasforma un vettore in se stesso.

Notazione compatta

$$I a = a \quad \Rightarrow \quad I = e_i \otimes e_i$$

Notazione indiciale

$$I_{ij} a_j = a_i \quad \Rightarrow \quad I_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} = 1 & i=j \\ = 0 & i \neq j \end{cases}$$

TENSORE TRASPOSTO

Proprietà:

- $a \cdot T b = b^T T^T a \quad \forall a, b$
- $[T]_{ij} = [T^T]_{ji}$
- $[A B C]^T = [C^T B^T A^T]$
- un tensore T è simmetrico se $T = T^T$

Notazione di Voigt: notazione ingegneristica condensata.

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix}$$

→ tensore del II ordine simmetrico

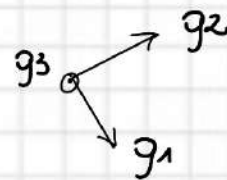
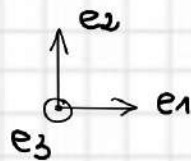
$$\{S\} = \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{13} \end{Bmatrix}$$

COMPONENTI DEL VETTORE E DEL TENSORE DEL II ORDINE

Le componenti dipendono dal sistema che si sceglie:

vettori

$$\mathbf{f} = f_i \mathbf{e}_i = \hat{f}_J \mathbf{g}_J$$



tensori II ordine

$$S = S_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \hat{S}_{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$$

Esiste una relazione tra le basi → date le due basi $\mathbf{e}_a$ e $\mathbf{g}_b$, un generico vettore $\mathbf{f}$ può essere espresso equivalentemente in una delle due basi.

$$\mathbf{f} = \hat{f}_b \mathbf{g}_b = f_a \mathbf{e}_a$$

Si moltiplicano scalarmente entrambi i termini per un i-esimo vettore della base $\mathbf{g}$:

$$(\hat{f}_b \mathbf{g}_b) \cdot \mathbf{g}_i = (f_a \mathbf{e}_a) \cdot \mathbf{g}_i$$

$$\Rightarrow \hat{f}_i = f_a (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{g}_i) \Rightarrow \hat{f}_i = Q_{ia} f_a \quad \text{con } Q_{ia} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{e}_a$$

In notazione ingegneristica,

$$\{\hat{f}\} = [Q] \{f\}$$

$$\text{con } Q = \begin{bmatrix} g_{1e1} & g_{1e2} & g_{1e3} \\ g_{2e1} & g_{2e2} & g_{2e3} \\ g_{3e1} & g_{3e2} & g_{3e3} \end{bmatrix}$$

Analoghi ragionamenti si possono fare per il tensore del II ordine:

$$T = T_{ij} e_i \otimes e_j = \hat{T}_{ij} g_i \otimes g_j$$

Ricordando che: $T_{ab} = e_a(T e_b)$

$$\Rightarrow g_m(T g_n) = \hat{T}_{mn} = T_{ij} (g_m e_i) (g_n e_j)$$

$$\Rightarrow \hat{T}_{mn} = T_{ij} Q_{mi} Q_{nj} \quad \text{con } Q_{mi} = g_m e_i$$

$$\Rightarrow e_m(T e_n) = T_{mn} = \hat{T}_{ij} (e_m g_i) (e_n g_j)$$

$$\Rightarrow T_{mn} = \hat{T}_{ij} Q_{im} Q_{jn}$$

Le relazioni precedenti possono essere anche scritte in forma compatta:

$$[\hat{T}] = [Q][T][Q]^T$$

$$[T] = [Q]^T[\hat{T}][Q]$$

$$\text{con } [Q]_{ij} = g_i \cdot e_j$$

OSS: Q rappresenta una trasformazione ortogonale:

$$Q_{ij} Q_{ik} = Q_{ij} Q_{kj} = \delta_{jk}$$

$$Q^T Q = Q Q^T = I$$

La verifica delle identità riportate sopra è data da:

$$(g_i \cdot e_j)(g_i \cdot e_k) = e_j \cdot (g_i \otimes g_i) e_k = e_j e_k = \delta_{jk}$$

TENSORE DEL IV ORDINE

Lo vedremo quando studieremo i legami costitutivi; un operatore lineare che trasforma un tensore del II ordine in un tensore del II ordine:

$$A: \underline{S}^2 \rightarrow \underline{S}^2$$

- basi vettoriali: 3 componenti e_1, e_2, e_3
- tensore del II ordine: 9 componenti $e_i \otimes e_j$

- tensore del IV ordine: 81 componenti $e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l$

$$A = \sum_{i,j,k,l=1}^3 A_{ijkl} e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l = \hat{A}_{ijkl} \hat{e}_i \otimes \hat{e}_j \otimes \hat{e}_k \otimes \hat{e}_l$$

Nel caso in cui limitiamo la discussione a tensori simmetrici del II ordine, possiamo identificare dei tensori del IV ordine con una matrice 6x6 (notazione di Voigt).

Notazione compatta

A

Notazione indiciale

A_{ijkl}

Notazione ingegneristica: devo ricordarmi la notazione di Voigt del tensore del II ordine:

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{13} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Per quanto riguarda il tensore del IV ordine si ha:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & A_{1112} & A_{1123} & A_{1113} \\ A_{2211} & A_{2222} & A_{2233} & A_{2212} & A_{2223} & A_{2213} \\ A_{3311} & A_{3322} & A_{3333} & A_{3312} & A_{3323} & A_{3313} \\ A_{1211} & A_{1222} & A_{1233} & A_{1212} & A_{1223} & A_{1213} \\ A_{2311} & A_{2322} & A_{2333} & A_{2312} & A_{2323} & A_{2313} \\ A_{1311} & A_{1322} & A_{1333} & A_{1312} & A_{1323} & A_{1313} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

1 2 3 4 5 6

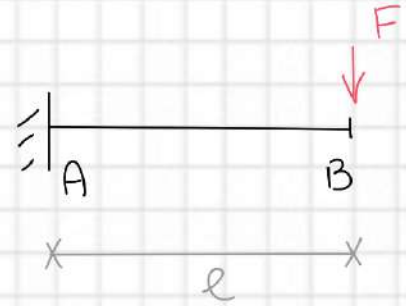
ESERCIZI

ES1: Fare analisi cinematica e statica della mensola caricata in punta.

ANALISI CINEMATICA

Formula $[3t - s = l - i]$

$$l - i = 0 \rightarrow \text{situazione ambigua}$$

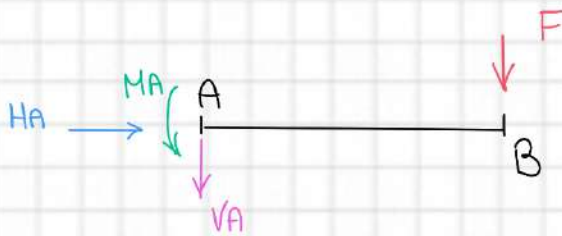


Metodo ispettivo:

togliendolo il vincolo in A introduco labilità quindi siamo nella condizione $l = i = 0 \rightarrow$ isostatica

ANALISI STATICA

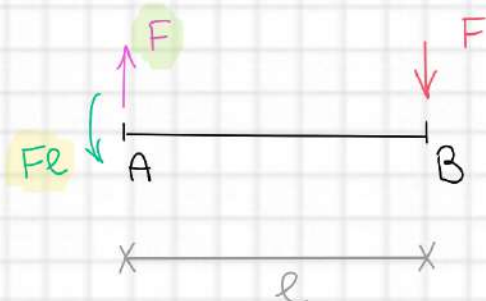
reazioni vincolari



equazioni di equilibrio (polo A)

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ -V_A - F = 0 \\ M_A - F l = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = -F \\ M_A = F l \end{cases}$$

struttura con reazioni vincolari



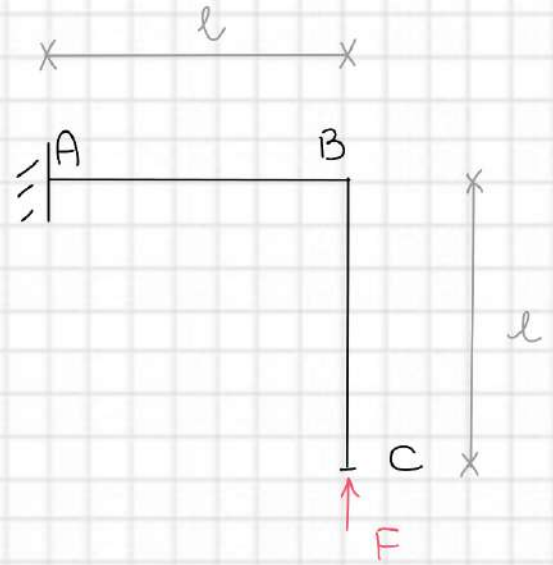
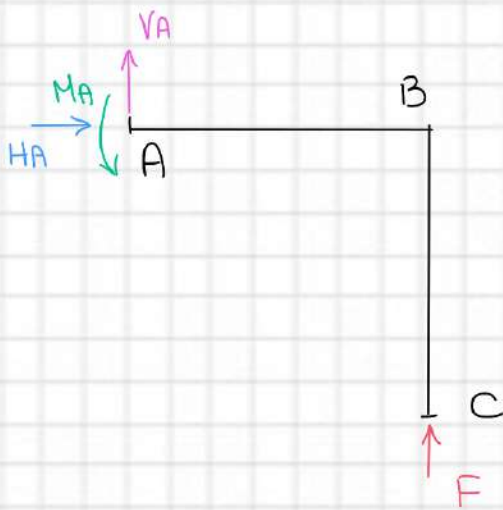
verifica

$$\sum F_x = 0 \quad \text{OK!}$$

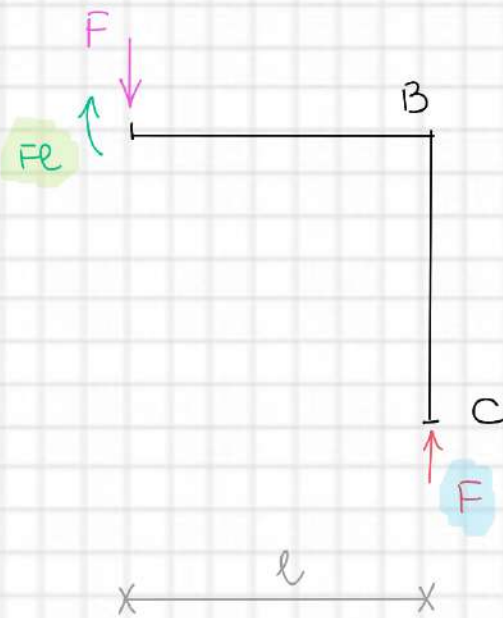
$$\sum F_y = 0 \quad F - F = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum M_B = 0 \quad Fl - Fl = 0 \quad \text{OK!}$$

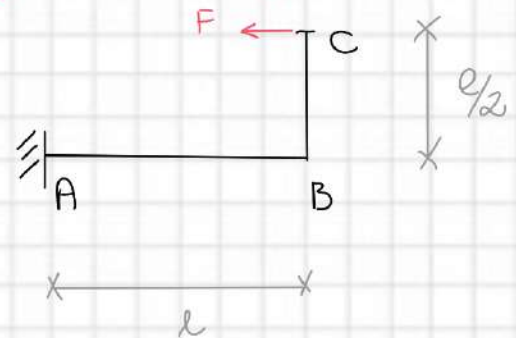
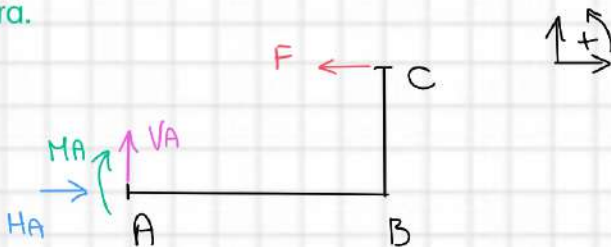
ES2: Fare analisi statica della seguente struttura senza i vari passaggi ma solamente ragionando sulla struttura.



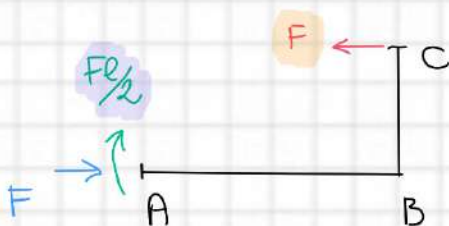
H_A è nulla
 V_A vale $-F \rightarrow$ bilancia la forza F
 M_A deve essere oraria e vale Fl , verifico:
 $M_A = -Fl + Fl$ OK!



ES3: Fare analisi statica della seguente struttura senza i vari passaggi ma solamente ragionando sulla struttura.

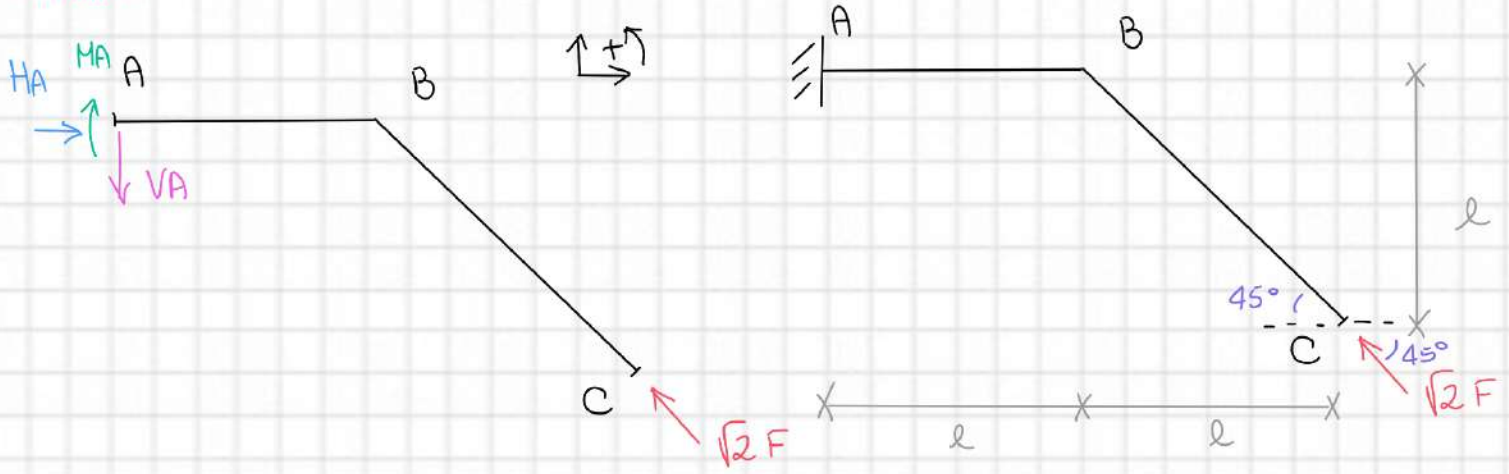


H_A si oppone a F
 V_A è nulla
 M_A è in senso orario e vale $\frac{Fl}{2}$, verifico:



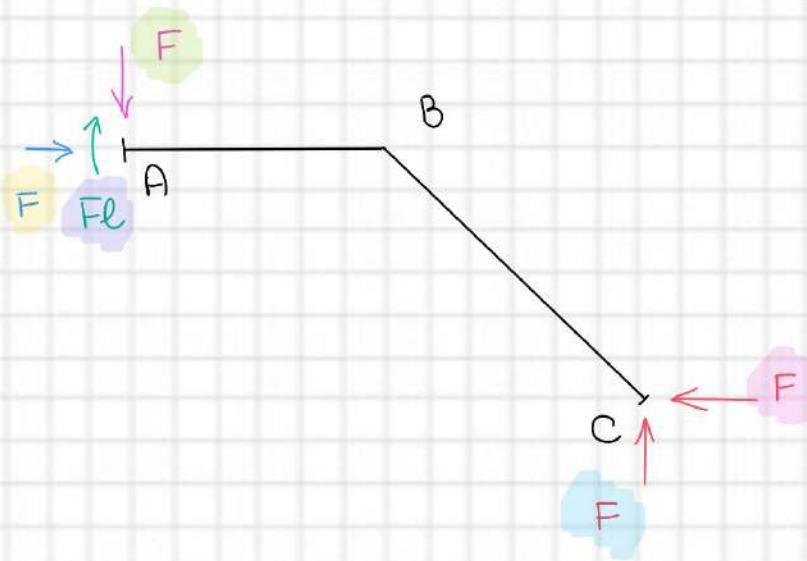
$$M_B = \frac{Fl}{2} - \frac{Fl}{2} \text{ OK!}$$

ES4: Fare analisi statica della seguente struttura senza i vari passaggi ma solamente ragionando sulla struttura.



$$-M_A + F \cdot 2l - F \cdot l = 0$$

$$M_A = F \cdot 2l - F \cdot l = F \cdot l$$



verifico (polo B)

$$-F \cdot l + 0 + F \cdot l + F \cdot l - F \cdot l = 0 \quad \text{ok!}$$

ES5: Fare analisi cinematica e statica della seguente struttura.

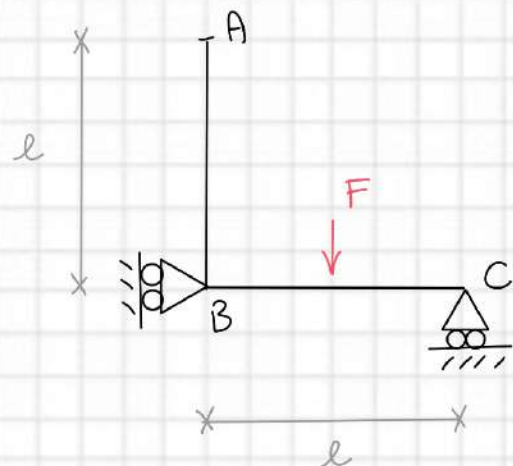
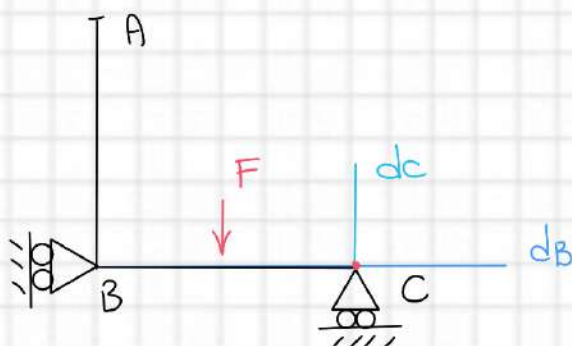
ANALISI CINEMATICA

Formula $[3t - s = l - i]$

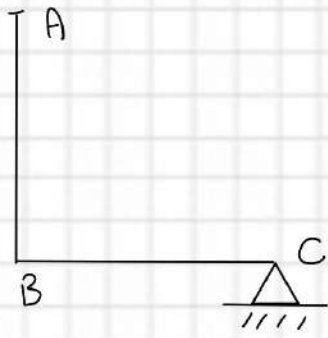
$$3t - s = 3 - 2 = 1$$

$$l - i > 0 \rightarrow \text{struttura labile}$$

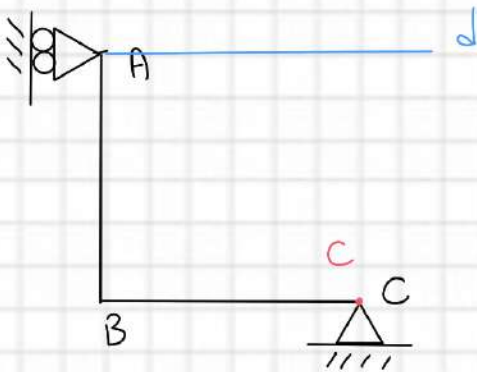
Metodo grafico [centri di rotazione]



Le due rette si incrociano in C $\rightarrow$ condizione analoga a quella di avere una cerniera in C



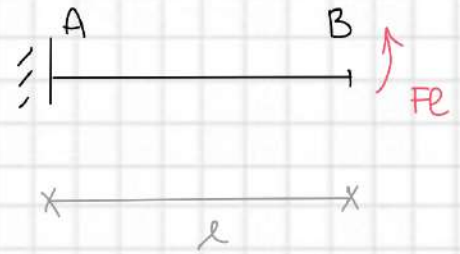
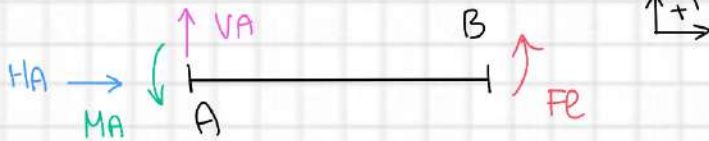
Per raggiungere il caso isostanco si può aggiungere un carrello a scorrimento verticale in A. Verifichiamo guardando i centri di rotazione:



ESERCIZI

ES1: Fare l'analisi statica della seguente struttura.

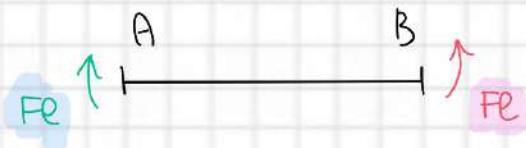
reazioni vincolari



equazioni di equilibrio (polo A)

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = 0 \\ M_A + F_B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = 0 \\ M_A = -F_B \end{cases}$$

struttura con reazioni vincolari



verifica

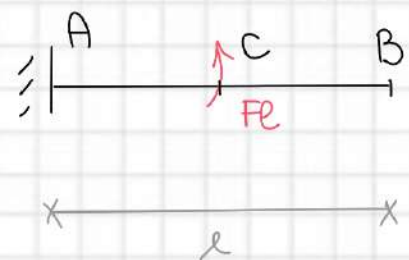
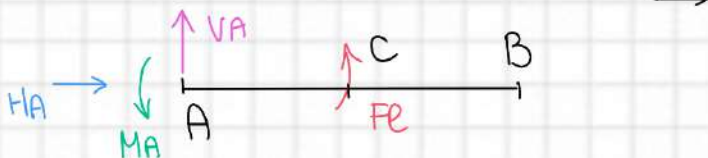
$$\sum F_x = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum M_B = 0 \quad F_B - F_B = 0 \quad \text{OK!}$$

ES2: Fare l'analisi statica della seguente struttura.

reazioni vincolari



equazioni di equilibrio (polo A)

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = 0 \\ M_A + F_B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = 0 \\ M_A = -F_B \end{cases}$$

struttura con reazioni vincolari



verifica

$$\sum F_x = 0 \quad \text{ok!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \text{ok!}$$

$$\sum M_C = 0 \quad Fe - Fe = 0 \quad \text{ok!}$$

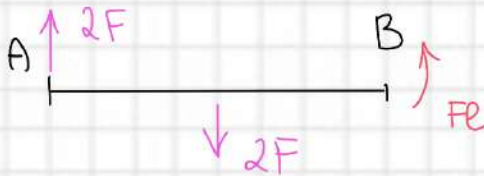
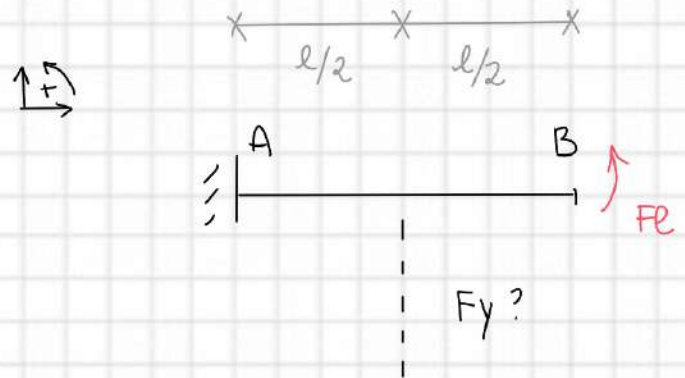
ES3: Trovare il modulo della forza verticale che annulla la reazione alla rotazione del vincolo in A attivata dal momento concentrato in B.

$M_B = 0$

$Fe - F_y \frac{l}{2} = 0$ *verso le basso*

$F_y \frac{l}{2} = Fe$

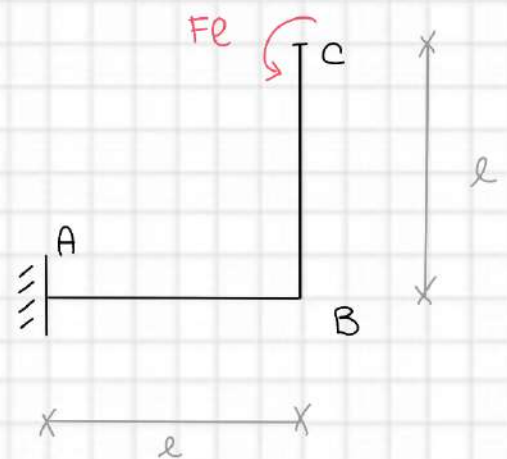
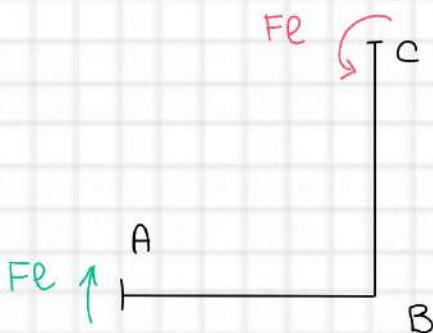
$F_y = 2F$



per avere equilibrio devo aggiungere una forza che bilanci l'azione di F_y

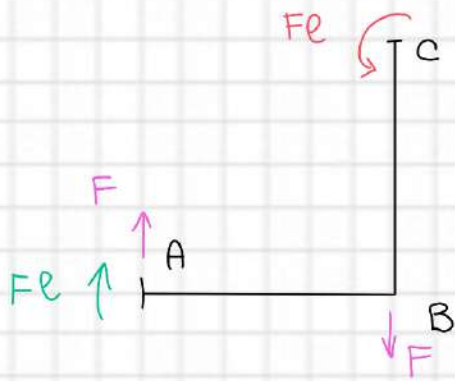
ES4: Trovare F affinché il momento generato dal vincolo in A sia nullo.

Equilibrio

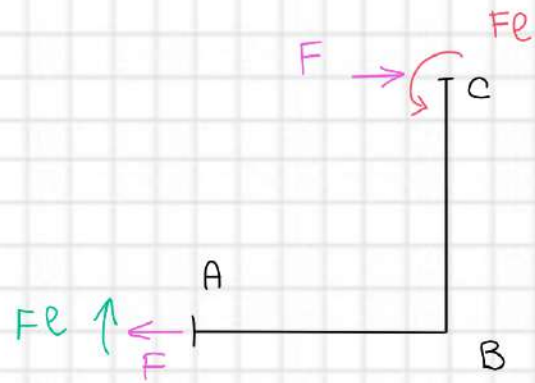


devo trovare una forza che annulli il momento generato da A.

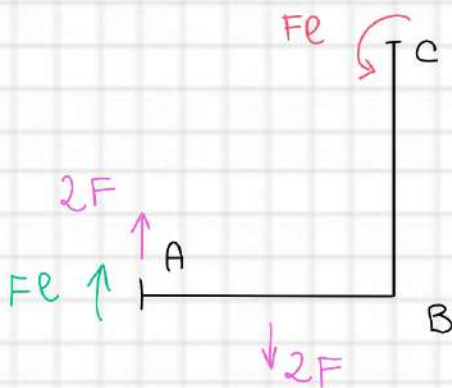
opzione 1



opzione 2



opzione 3



Se ruoto la struttura ruota le cose NON cambiano!

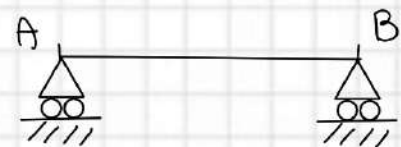
RIPASSO - CINEMATICA

ES1: fare l'analisi cinematica della seguente struttura con il metodo ispettivo e con quello grafico.

Formula $[3t - s = l - i]$

$$3t - s = 1$$

$$l - i = 1$$



Metodo ispettivo

equazioni di vincolo

$$N_A = 0$$

$$N_B = 0$$

Rimuovendo il vincolo in B la struttura è libera di muoversi orizzontalmente e di ruotare attorno ad A.

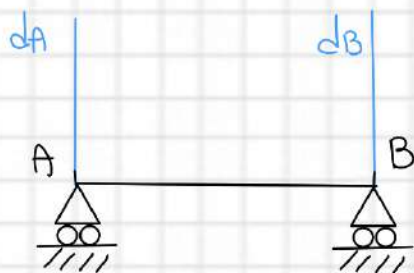
Rimuovendo il vincolo in A la struttura è libera di muoversi orizzontalmente e di ruotare attorno ad B.

Se sono presenti entrambi i carrelli la rotazione non è possibile $\rightarrow \phi_A = \phi_B = 0$

Il grado di libertà risultato dalla formula è dovuto alla traslazione orizzontale.

Possibili coordinate lagrangiane sono u_A o u_B

Metodo grafico [centri di rotazione]



Nel caso del carrello il centro di rotazione si trova in un punto appartenente alla retta d.

Se si hanno più vincoli il centro di rotazione si trova nell'intersezione dei centri di rotazione dei singoli vincoli.

In questo caso le rette si incontrano all'infinito $\rightarrow$ si ha un centro di rotazione all'infinito. Questo è congruente perché la traslazione orizzontale la posso vedere come la rotazione rispetto a un punto posto all'infinito.

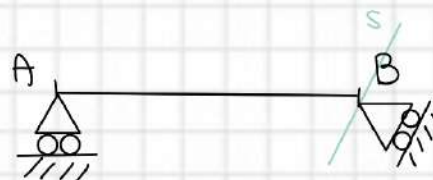
Quindi siamo nel caso di struttura ipostatica $\Rightarrow i = 0, l = 1$

ES2: fare l'analisi cinematica della seguente struttura con il metodo ispettivo e con quello grafico.

Formula $[3t - s = l - i]$

$$3t - s = 1$$

$$l - i = 1$$

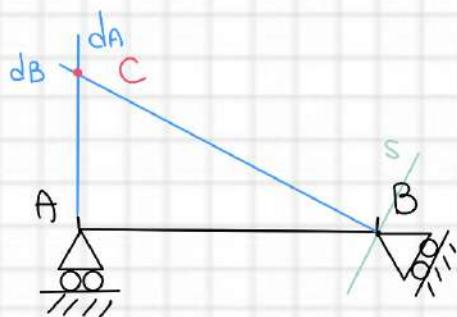


Metodo ispettivo

Rimuovendo il vincolo in B la struttura è libera di muoversi orizzontalmente e di ruotare attorno ad A.

Rimuovendo il vincolo in A la struttura è libera di muoversi lungo la direzione s e di ruotare attorno ad B.

Metodo grafico [centri di rotazione]



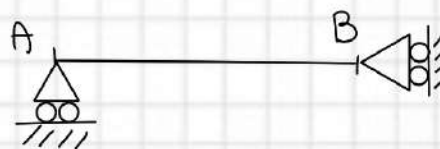
dal punto di vista cinematico è come avere una cerniera in C $\rightarrow$ ruota attorno a C

ES3: fare l'analisi cinematica della seguente struttura con il metodo ispettivo e con quello grafico.

Formula $[3t - s = l - i]$

$$3t - s = 1$$

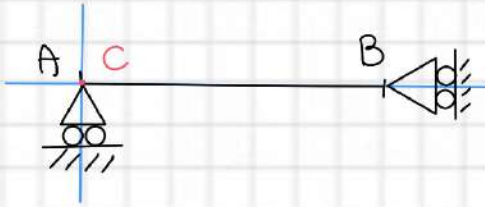
$$l - i = 1$$



Metodo ispettivo

Rimuovendo il vincolo in B la struttura è libera di muoversi orizzontalmente e di ruotare attorno ad A.
Rimuovendo il vincolo in A la struttura è libera di muoversi verticalmente e di ruotare attorno ad B.
Se sono presenti entrambi i carrelli è possibile la rotazione attorno ad A.

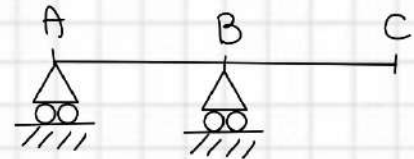
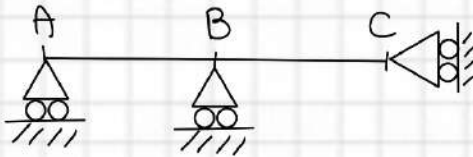
Metodo grafico [centri di rotazione]



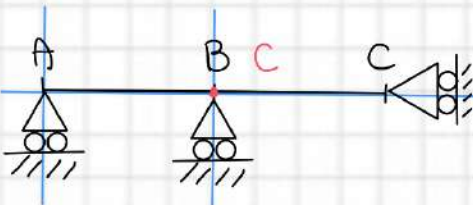
dal punto di vista cinematico è come avere una cerniera in A $\rightarrow$ ruota attorno ad A

ES4: data la seguente struttura, dove e con quale inclinazione si deve aggiungere un carrello per raggiungere una configurazione isostatica?

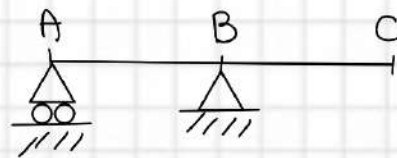
Aggiungo un carrello a scorrimento verticale in C.



Verifico $\rightarrow$ Metodo grafico [centri di rotazione]



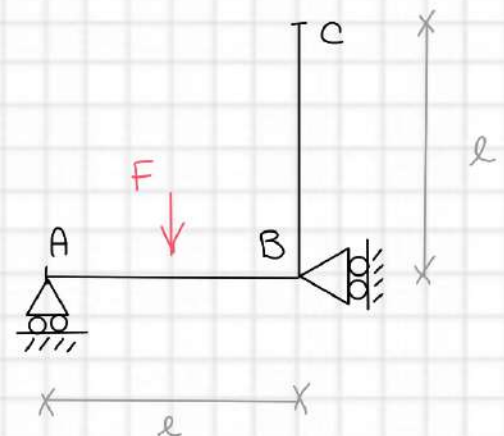
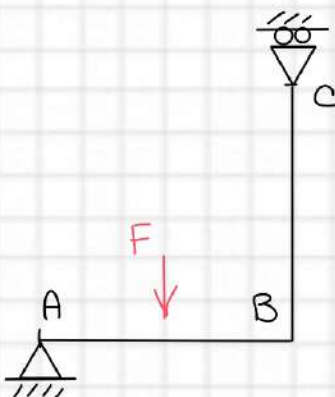
$\equiv$



Effettivamente l'asse del carrello in A non interseca la cerniera in B $\Rightarrow$ struttura isostatica

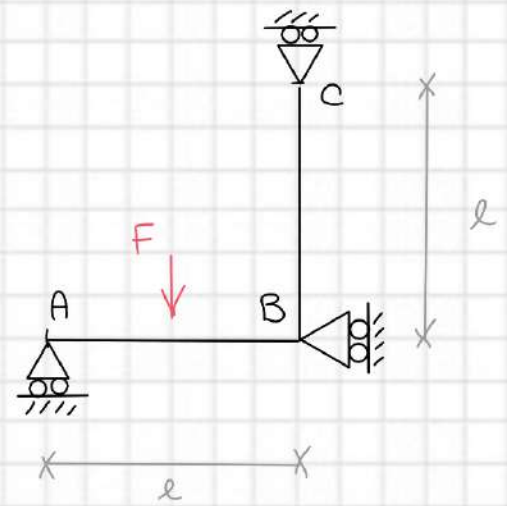
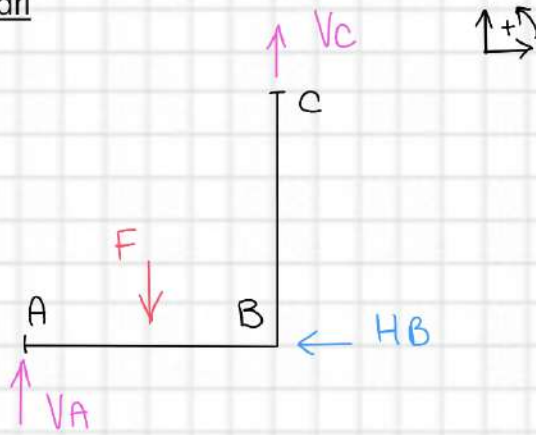
ES5: data la seguente struttura, dove e con quale inclinazione si deve aggiungere un carrello per raggiungere una configurazione isostatica? Fare poi analisi statica della struttura trovata.

Ragiono con il metodo grafico: la struttura è equivalente a un vincolo cerniera in A. Per rendere la struttura isostatica basta mettere un carrello che ha asse che non passa per A:



ANALISI STATICA

reazioni vincolari



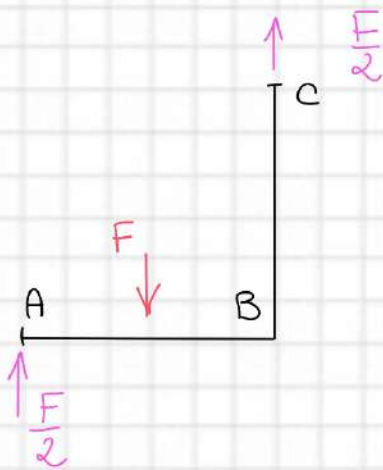
equazioni di equilibrio (polo B)

$$\begin{cases} H_B = 0 \\ V_A + V_C - F = 0 \\ -V_A l + F \frac{l}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_B = 0 \\ V_C = F - V_A \\ V_A = \frac{F}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_B = 0 \\ V_C = \frac{F}{2} \\ V_A = \frac{F}{2} \end{cases}$$

struttura con reazioni vincolari



verifica

$$\sum F_x = 0 \quad \text{ok!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \frac{F}{2} - F + \frac{F}{2} = 0 \quad \text{ok!}$$

$$\sum M_A = 0 \quad -F \frac{l}{2} + \frac{F}{2} l = 0 \quad \text{ok!}$$

ESERCIZI

ES1: fare analisi cinematica e statica della seguente struttura.

ANALISI CINEMATICA

Formula $[3t - s = l - i]$

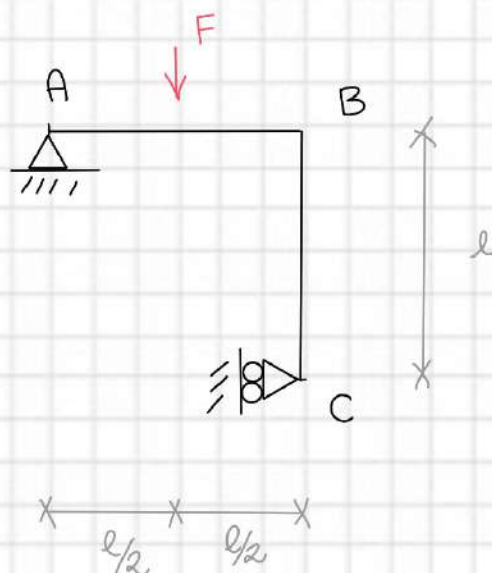
$$3t - s = 0$$

$$l - i = 0$$

$i = 0 \rightarrow$ non possiamo togliere nessuno dei vincoli senza cambiare il cinematisma della struttura.

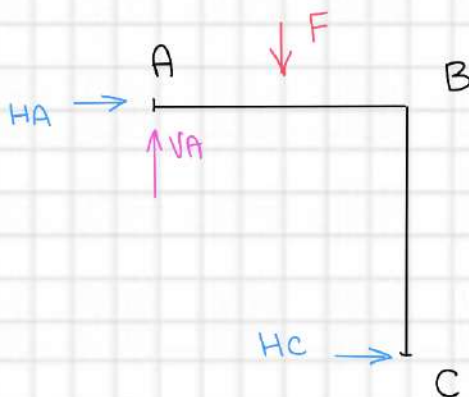
$l = 0 \rightarrow$ l'asse del carrello in C non passa per A.

$\Rightarrow$ caso isostatico



ANALISI STATICA

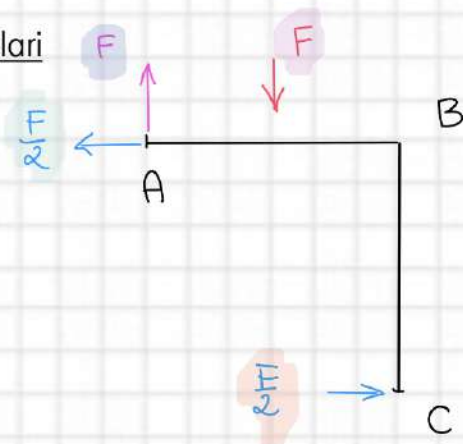
reazioni vincolari $\uparrow + \curvearrowright$



equazioni di equilibrio (polo A)

$$\begin{cases} H_A + H_C = 0 \\ V_A - F = 0 \\ -F \frac{l}{2} + H_C l = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = -\frac{F}{2} \\ V_A = F \\ H_C = \frac{F}{2} \end{cases}$$

struttura con reazioni vincolari



verifica

$$\sum F_x = 0$$

$$-\frac{F}{2} + \frac{F}{2} = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum F_y = 0$$

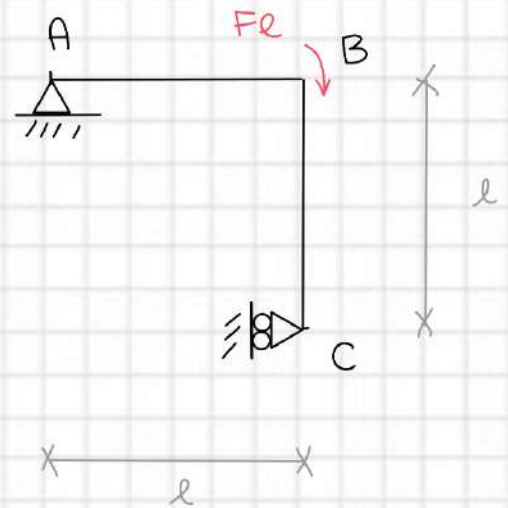
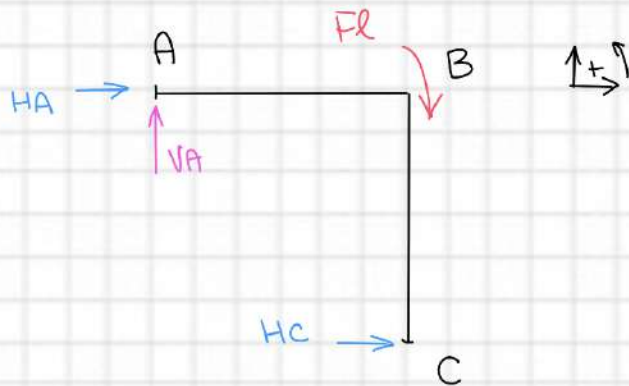
$$F - F = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-F\ell + \frac{F\ell}{2} + \frac{F\ell}{2} = 0 \quad \text{OK!}$$

ES2: fare analisi statica della seguente struttura.

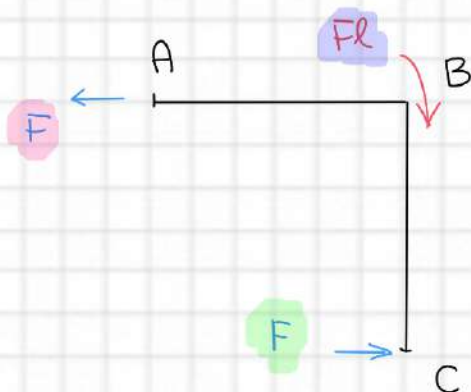
reazioni vincolari



equazioni di equilibrio (polo A)

$$\begin{cases} H_A + H_C = 0 \\ V_A = 0 \\ -F\ell + H_C\ell = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A - F \\ V_A = 0 \\ H_C = F \end{cases}$$

struttura con reazioni vincolari



verifica

$$\sum F_x = 0$$

$$-F + F = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum F_y = 0$$

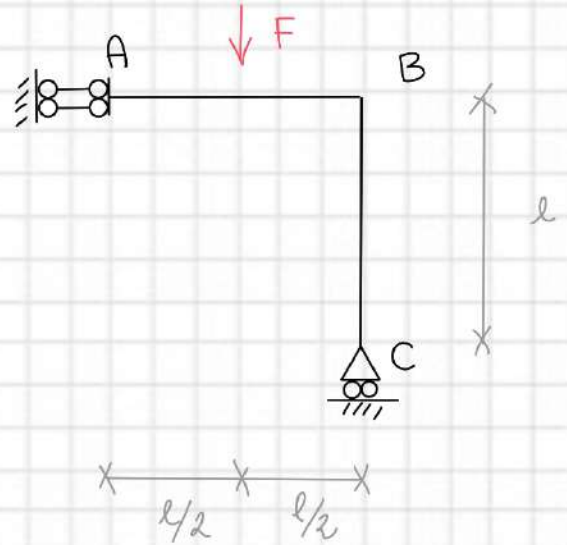
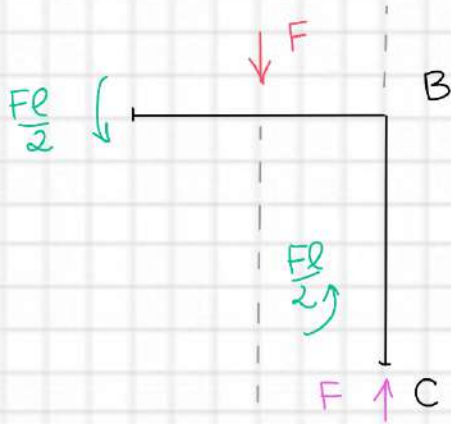
OK!

$$\sum M_B = 0$$

$$-F\ell + F\ell = 0 \quad \text{OK!}$$

ES3: trovare l'equilibrio delle seguente struttura senza scrivere le equazioni di equilibrio.

reazioni vincolari



Il vincolo carrello in C dà una reazione verticale.

Il vincolo doppio pendolo dà una reazione orizzontale e un momento.

Per la traslazione orizzontale non ho nessuna azione quindi si cancella.

Per la traslazione verticale devo bilanciare la forza F quindi la reazione in C sarà contraria a F e di modulo pari a F.

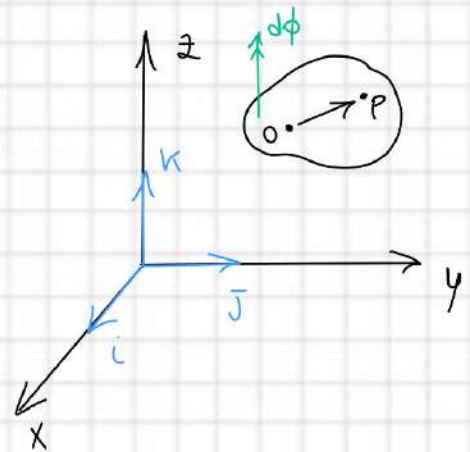
Osservo che si è creata così una coppia di modulo $F \frac{l}{2}$ in senso antiorario $\Rightarrow$ il vincolo in A dovrà

bilanciare tale coppia quindi valere in modulo $\frac{F l}{2}$ e in senso orario.

In un corpo rigido soggetto a roto-traslazione, gli spostamenti elementari di due generici punti P e O sono legati dalla seguente relazione:

$$dS_P = dS_O + d\phi \times PO$$

dS : vettore spostamento
 $d\phi$ vettore rotazione



$$(u_P - u_O)i + (v_P - v_O)j + (w_P - w_O)k = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \phi_x & \phi_y & \phi_z \\ (x_P - x_O) & (y_P - y_O) & (z_P - z_O) \end{bmatrix}$$

In 2D si ha:

$$(u_p - u_0)i + (v_p - v_0)j = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \phi & \phi & \phi_z \\ (x_p - x_0) & (y_p - y_0) & \phi \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u_p = u_0 - (y_p - y_0) \phi_z$$

$$v_p = v_0 + (x_p - x_0) \phi_z$$

ES4: fare analisi cinematica della seguente struttura con il metodo analitico.

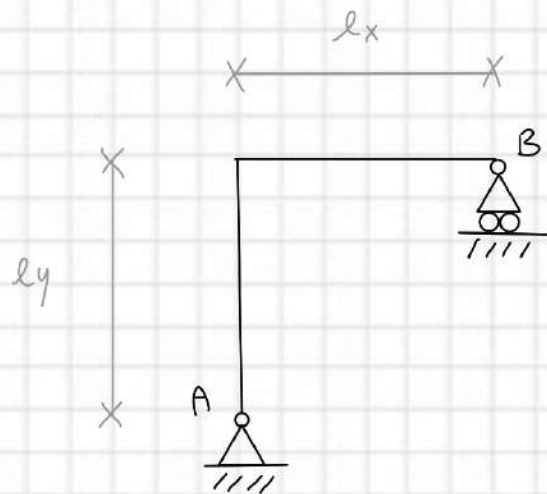
Formula $[3t - s = l - i]$

$$t = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} A) S = 2 \text{ cerniera} \\ B) S = 1 \text{ carrello} \end{array} \right\} S = 3$$

$$3t - s = 0$$

$$l - i = 0$$



1. Scrivo le equazioni cinematiche di ogni vincolo:

$$u_A = 0$$

$$v_A = 0$$

$$u_B = 0$$

2. Scelgo un polo, ponendo su di esso l'origine di un sistema di riferimento xy. Proietto su quel polo tutte le equazioni cinematiche:



$$\begin{aligned} v_B &= v_A + (x_B - x_A) \phi_A \\ &= v_A + l_x \phi_A \end{aligned}$$

$$[v_p = v_0 + (x_p - x_0) \phi_z]$$

$$\text{so che: } v_B = 0$$

$$\Rightarrow v_A + l_x \phi_A = 0$$

3. Scrivo il sistema ottenuto che è in funzione dei gdl:

$$\begin{cases} U_A = 0 \\ N_A = 0 \\ N_A + l \cdot \phi_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & l \cdot x \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} U_A \\ N_A \\ \phi_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = l \cdot x \neq 0 \Rightarrow l = 0 \rightarrow \text{caso isostatico}$$

ES5: fare analisi cinematica della seguente struttura con il metodo analitico.

Formula $[3t - s = l - i]$

$$3t - s = 0$$

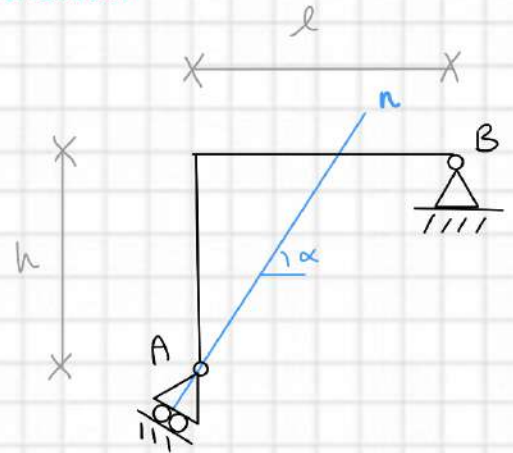
$$l - i = 0$$

1. Scrivo le equazioni cinematiche di ogni vincolo:

$$dS_A \cdot n = 0 \rightarrow U_A \cos \alpha + N_A \sin \alpha = 0$$

$$U_B = 0$$

$$N_B = 0$$

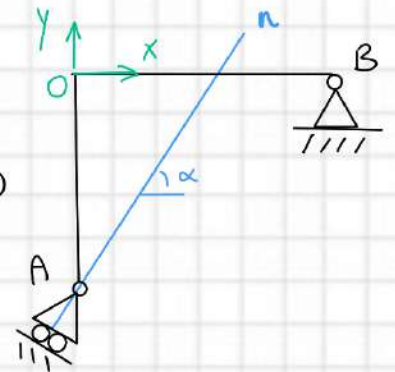


2. Scelgo un polo, ponendo su di esso l'origine di un sistema di riferimento xy. Proietto su quel polo tutte le equazioni cinematiche:

$$\begin{cases} U_B = U_0 - (y_B - y_0) \phi_0 \\ N_B = N_0 + (x_B - x_0) \phi_0 \end{cases} \begin{cases} U_B = U_0 = 0 \\ N_B = N_0 + l \phi_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_A = U_0 - (y_A - y_0) \phi_0 \\ N_A = N_0 + (x_A - x_0) \phi_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (U_0 + h \phi_0) \cos \alpha + N_0 \sin \alpha = 0$$



si ha quindi:

$$\begin{cases} U_B = U_0 = 0 \\ N_B = N_0 + l \phi_0 = 0 \\ (U_0 + h \phi_0) \cos \alpha + N_0 \sin \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \\ \cos \alpha & \sin \alpha & h \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ N_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

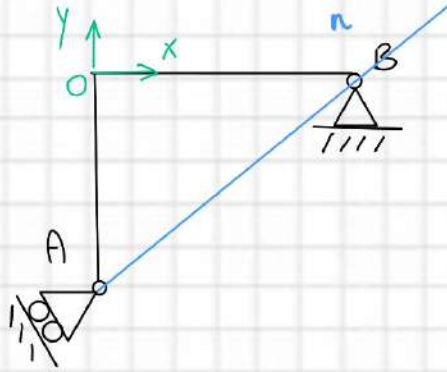
$$\det(A) = h \cos \alpha - l \sin \alpha$$

Quando ho $\det(A) = 0$? ($\rightarrow$ sono quindi in un caso non isostatico)

$$h \cos \alpha - l \sin \alpha = 0 \Rightarrow h \cos \alpha = l \sin \alpha \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{h}{l}$$

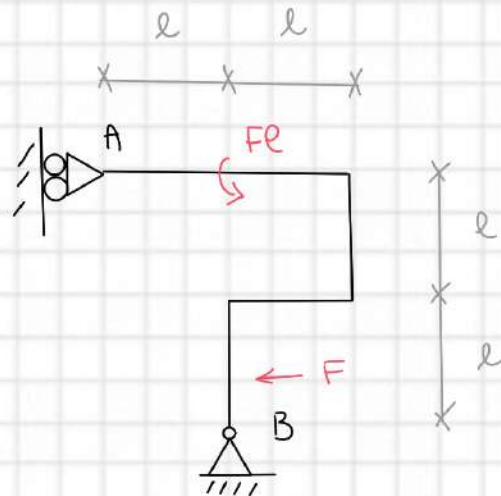
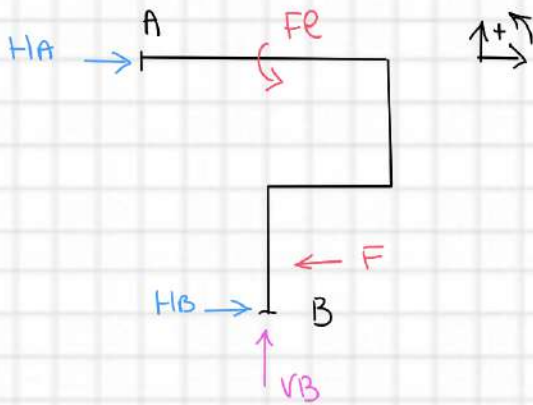
$$\Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{h}{l}\right)$$

ovvero nel caso in cui l'asse del carrello passa per il fulcro della cerniera.



ES6: fare analisi statica della seguente struttura.

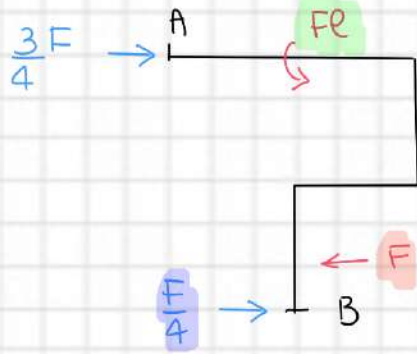
reazioni vincolari



equazioni di vincolo (polo B)

$$\begin{cases} H_A + H_B - F = 0 \\ V_B = 0 \\ \frac{Fe}{2} + Fe - H_A 2l = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = \frac{3}{4} F \\ H_B = \frac{F}{4} \\ V_B = 0 \end{cases}$$

struttura con reazioni vincolari

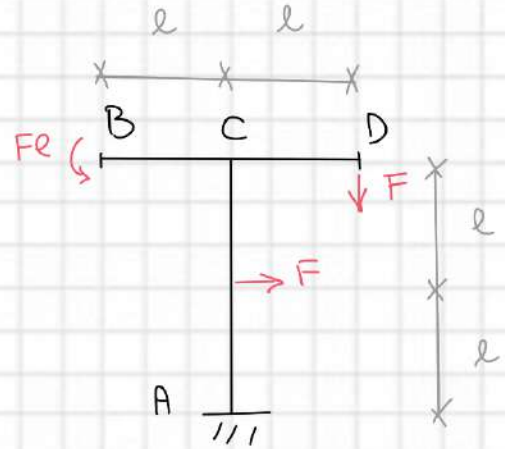
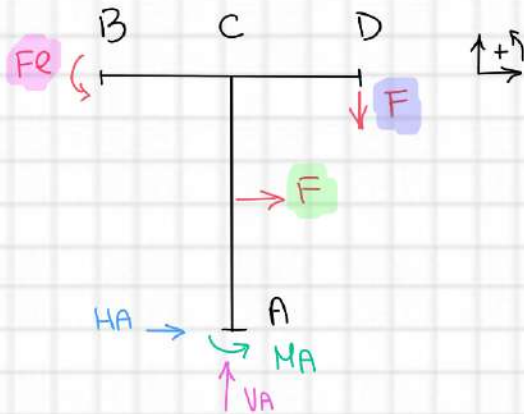


verifica

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & \frac{3F}{4} + \frac{F}{4} - F &= 0 \quad \text{OK!} \\ \sum F_y &= 0 & \text{OK!} \\ \sum M_A &= 0 & Fl - \frac{3}{2}Fl + \frac{F}{4}2l &= 0\end{aligned}$$

ES7: fare analisi statica della seguente struttura.

reazioni vincolari

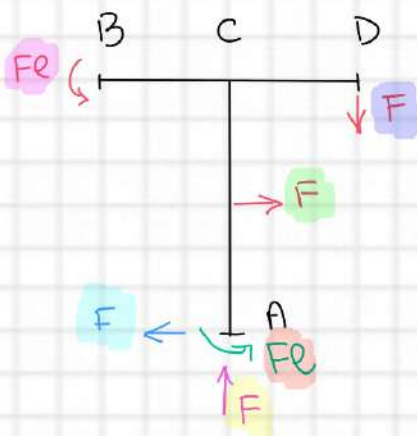


equazioni di vincolo (polo C)

$$\begin{cases} H_A + F = 0 \\ V_A - F = 0 \\ M_A - Fl - Fl + Fl = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = -F \\ V_A = F \\ M_A = Fl \end{cases}$$

struttura con reazioni vincolari



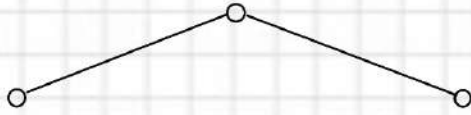
verifica

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & F - F &= 0 \quad \text{OK!} \\ \sum F_y &= 0 & F - F &= 0 \quad \text{OK!} \\ \sum M_C &= 0 & Fl - Fl + Fl + Fl - F2l &= 0 \quad \text{OK!}\end{aligned}$$

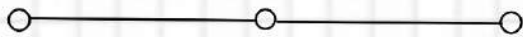
CORPI RIGIDI MONODIMENSIONALI

Le considerazioni fatte per l'asta singola possono essere estese a sistemi di aste vincolate non all'esterno ma anche tra loro. In questo caso le condizioni di equilibrio non sono limitate alle tre equazioni cardinali della statica. L'incremento del numero di equazioni necessarie per imporre l'equilibrio è l'unica differenza rispetto al caso dell'asta singola.

ARCO A TRE CERNIERE: formato da 2 aste vincolate esternamente e tra loro da cerniere.



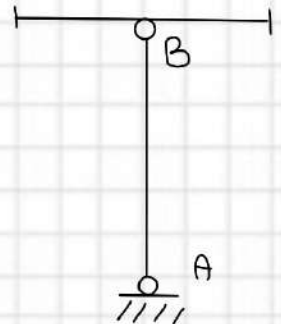
cerniere non allineate $\rightarrow$ sistema isostatico



cerniere allineate $\rightarrow$ caso labile

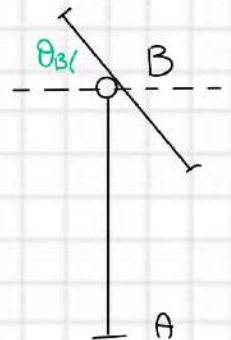
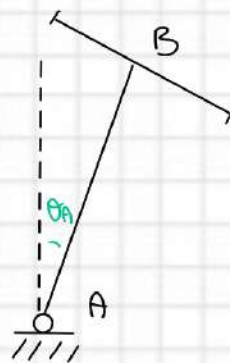
Infatti se i fulcri delle 3 cerniere appartengono alla stessa retta, la tangente iniziale degli archi di cerchio che le aste descriverebbero se non ci fosse il vincolo interno sarebbe uguale.

Consideriamo il caso in cui un'asta è incernierata a terra in A e legata alla seconda asta in B con una cerniera.



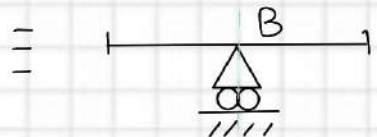
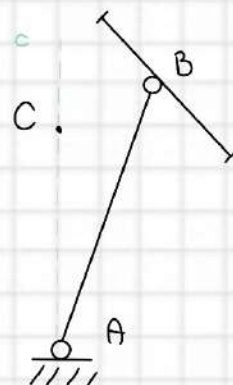
Analisi ispettiva:

- considero attiva solo la cerniera in A
 $\rightarrow$ il sistema può ruotare attorno ad A,
- considero attiva solo la cerniera in B
 $\rightarrow$ il sistema può ruotare attorno ad B.



Notiamo che la combinazione dei due cinematismi produce una rotazione attorno ad un punto C che sta sulla congiungente tra le due cerniere.

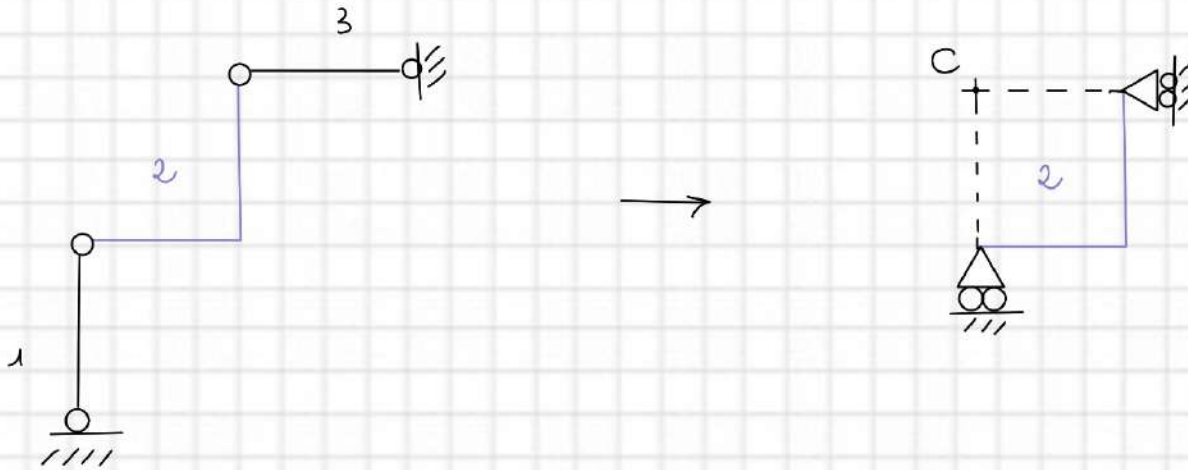
L'asta verticale costituisce per quella orizzontale un vincolo semplice detto **BIELLA** $\rightarrow$ come avere un carrello in B con retta d'azione C.



ES:

Ho 9 gdl e 8 gradi di vincolo.

Notiamo che le aste 1 e 3 sono bielle per l'asta 2 che quindi può ruotare intorno al punto C dato dall'intersezione della retta d'azione dei due vincoli semplici.



ES: fare l'analisi cinematica della seguente struttura.

Formula $[3t - s = l - i]$

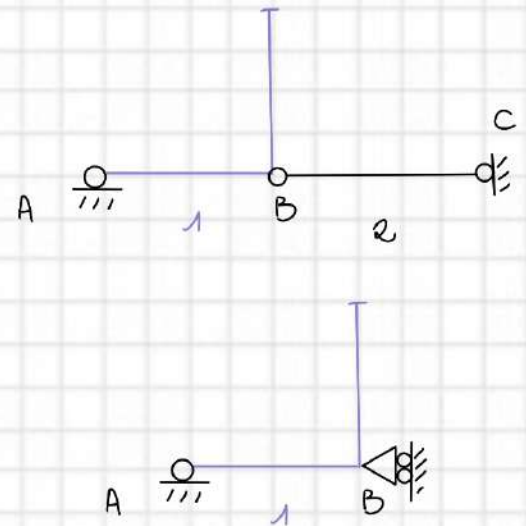
$$3t - s = 0$$

$$l - i = 0$$

Noto che l'asta 2 è per l'asta 1 una biella con asse di azione orizzontale quindi posso sostituirla con un carrello con asse di scorrimento verticale.

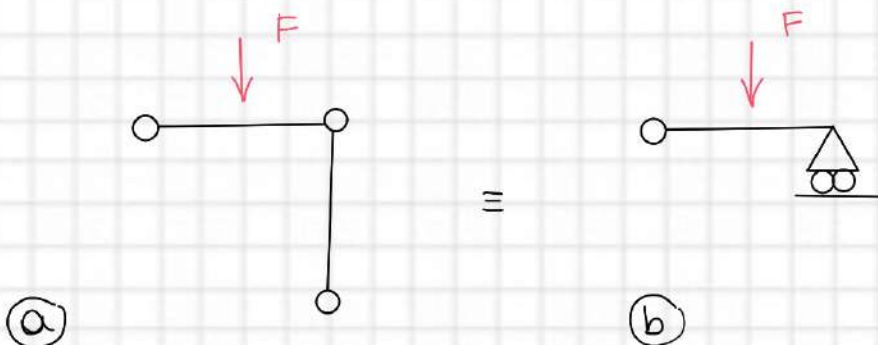
Metodo grafico [centri di rotazione]

Il corpo è dotato di labilità dato che il centro di rotazione è in A.

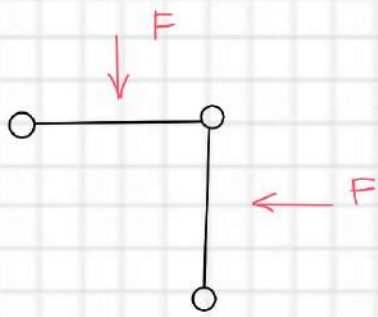


Il termine biella si usa dal punto di vista puramente cinematico come collegamento, tramite due cerniere alle estremità, con altri elementi strutturali indipendentemente che sia caricata o meno.

Dal punto di vista statico, la biella è un'asta che sia sollecitata solo agli estremi e che su tali estremi non riceva momenti.



Il caso a) è analogo al caso b) sia dal punto di vista cinematico sia statico.

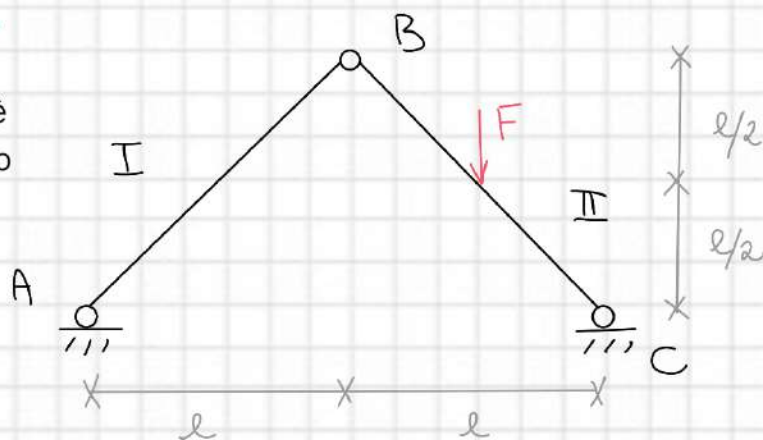


In questo caso non posso fare l'analisi statica considerando il carrello al posto dell'asta perché su di essa agisce una forza.

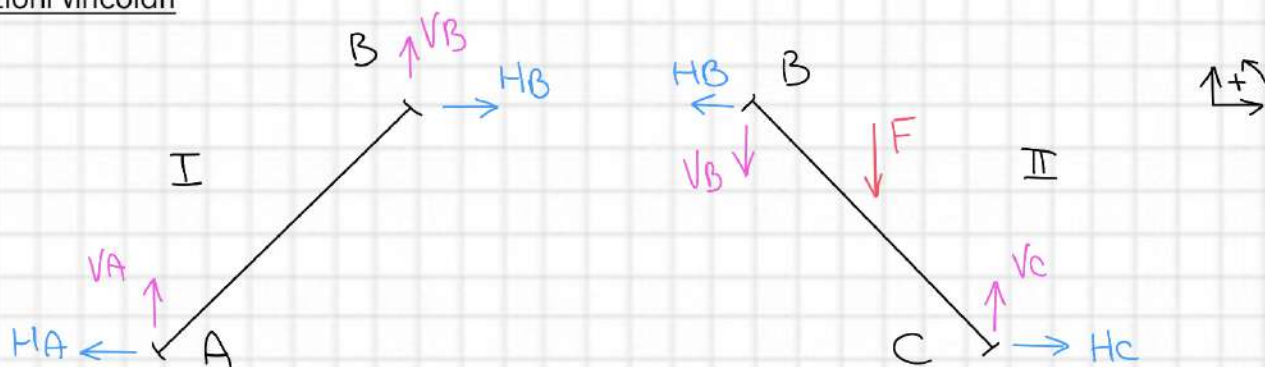
ESERCIZI

ES1: fare l'analisi statica della seguente struttura.

La struttura è un arco a tre cerniere; la struttura è isostatica dato che i fulcri delle cerniere non sono allineate.



reazioni vincolari

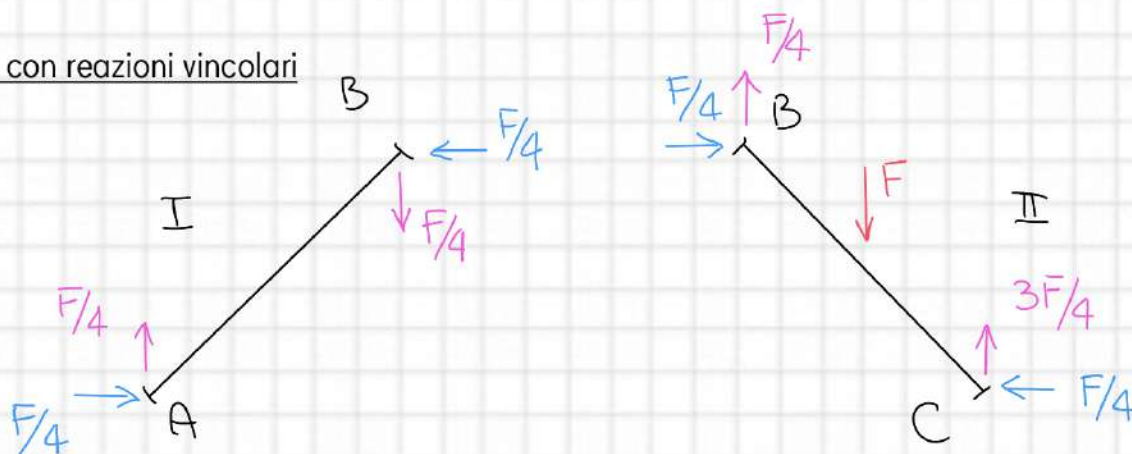


equazioni di equilibrio (polo A per asta I - polo C per asta II)

$$\left\{ \begin{array}{l} -H_A + H_B = 0 \\ V_A + V_B = 0 \\ -H_B l + V_B l = 0 \\ -H_B + H_C = 0 \\ -V_B - F + V_C = 0 \\ +\frac{F l}{2} + V_B l + H_B l = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \textcircled{\text{I}} \\ \textcircled{\text{II}} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_A = H_B \\ V_A = -V_B \\ V_B = H_B \\ H_C = H_B \\ V_C = V_B + F \\ H_B = -\frac{F}{4} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_A = -\frac{F}{4} \\ V_A = \frac{F}{4} \\ V_B = -\frac{F}{4} \\ H_C = -\frac{F}{4} \\ V_C = \frac{3F}{4} \\ H_B = -\frac{F}{4} \end{array} \right.$$

struttura con reazioni vincolari



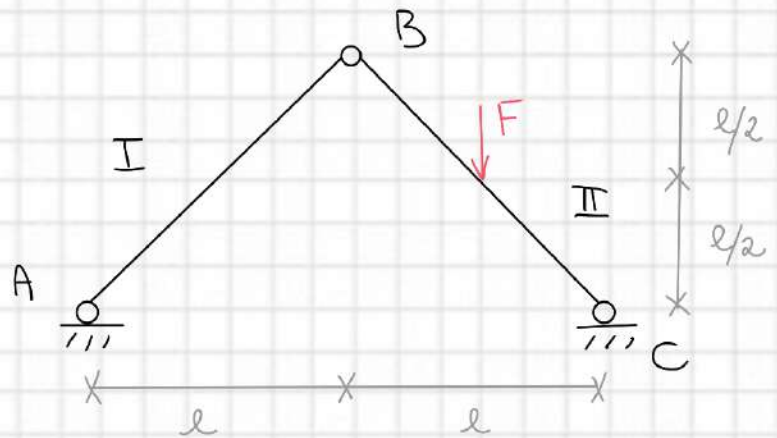
verifica

$$\left. \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{F}{4} - \frac{F}{4} = 0 \text{ OK} \\ \frac{F}{4} - \frac{F}{4} = 0 \text{ OK} \\ -\frac{F}{4}l + \frac{F}{4}l = 0 \text{ OK} \end{array} \quad \text{I}$$

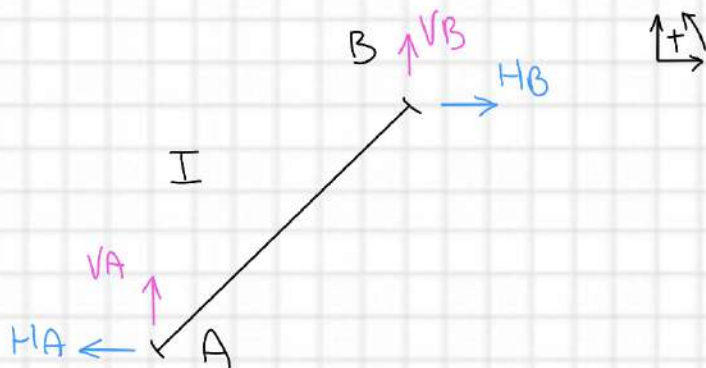
$$\left. \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{F}{4} - \frac{F}{4} = 0 \text{ OK} \\ \frac{F}{4} - F + \frac{3}{4}F = 0 \text{ OK} \\ -F\frac{l}{2} + \frac{3}{4}Fl - \frac{F}{4}l = 0 \text{ OK} \end{array} \quad \text{II}$$

ES2: ripetere l'esercizio precedente considerando, per le equazioni di equilibrio, l'asta I e la struttura globale.

Per le equazioni della struttura globale devo ignorare il vincolo cerniera interna.

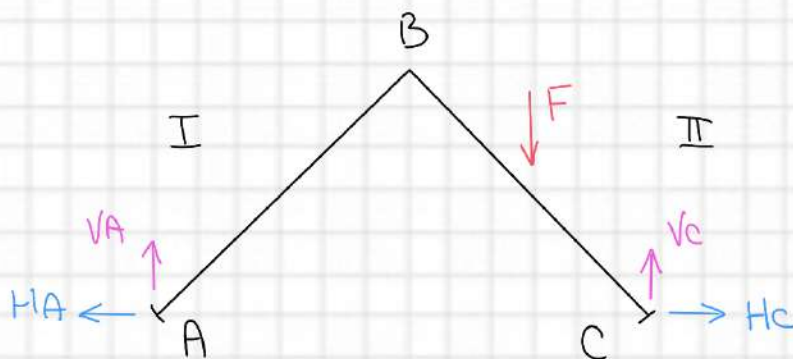


reazioni vincolari



equazioni di equilibrio (polo C)

$$\begin{cases} -H_A + H_B = 0 \\ V_A + V_B = 0 \\ -H_B l + V_B l = 0 \end{cases}$$



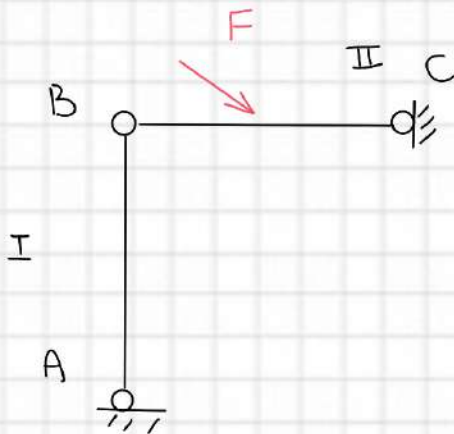
$$\begin{cases} -H_A + H_C = 0 \\ V_A + V_C - F = 0 \\ -V_A 2l + F\frac{l}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = H_B \\ V_A = -V_B \\ H_B = V_B \\ H_A = H_C \\ V_C = -V_A + F \\ V_A = \frac{F}{4} \end{cases}$$

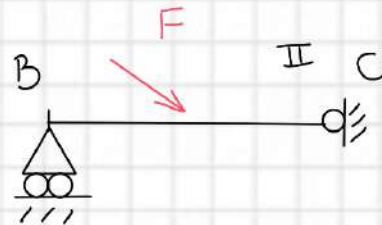
$$\begin{cases} H_C = -\frac{F}{4} \\ V_B = -\frac{F}{4} \\ H_B = -\frac{F}{4} \\ H_A = -\frac{F}{4} \\ V_C = \frac{3F}{4} \\ V_A = \frac{F}{4} \end{cases}$$

otteniamo lo stesso risultato di prima

OSS: ruotando la struttura l'equilibrio non cambia! Inoltre possiamo vedere l'asta I come biella per l'asta II.



=



ES3: fare l'analisi cinematica e statica della seguente struttura.

ANALISI CINEMATICA

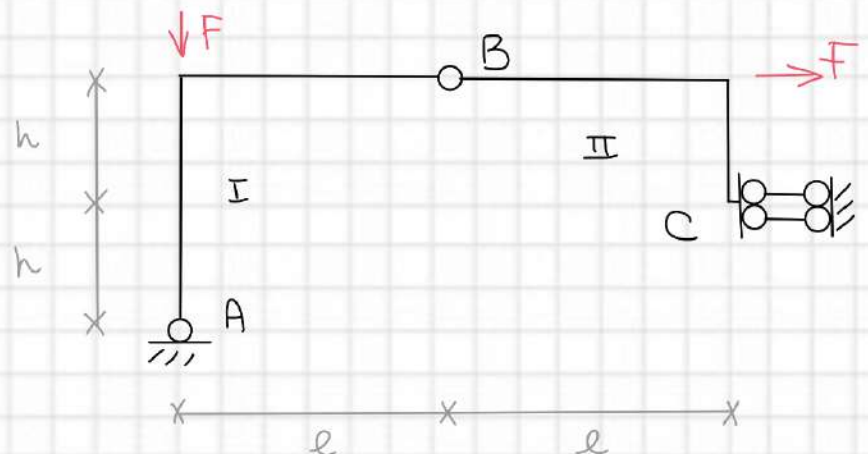
Formula $[3t - s = l - i]$

$$t = 2$$

$$\Rightarrow 3t - s = 0$$

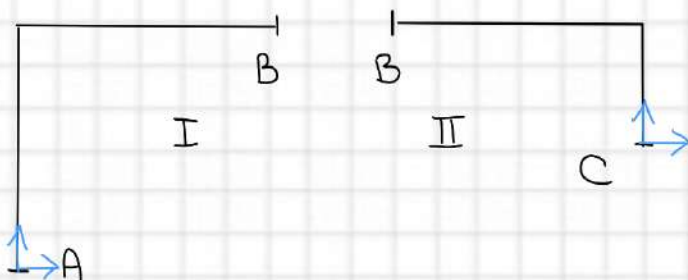
$$s = 6$$

$$\Rightarrow l - i = 0$$



Metodo analitico

struttura senza vincoli



gdl

$$u_A, v_A, \phi_A, u_C, v_C, \phi_C$$

equazioni di vincolo

vincolo cerniera in A

$$u_A = 0$$

$$N_A = 0$$

vincolo cerniera interna in B

$$u_B^I = u_B^{II}$$

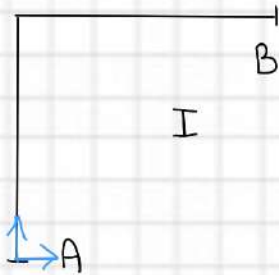
$$N_B^I = N_B^{II}$$

vincolo doppio pendolo ad asse orizzontale in C

$$u_C = 0$$

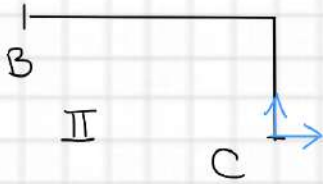
$$\phi_C = 0$$

equazioni in funzione dei gdl



$$u_B^I = u_A - 2h\phi_A$$

$$N_B^I = N_A + l\phi_A$$



$$u_B^{II} = u_C - h\phi_C$$

$$N_B^{II} = N_C - l\phi_C$$

Si ha quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_A = 0 \\ N_A = 0 \\ u_A - 2h\phi_A - u_C + h\phi_C = 0 \\ N_A + l\phi_A - N_C + l\phi_C = 0 \\ u_C = 0 \\ \phi_C = 0 \end{array} \right.$$

sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2h & -1 & 0 & h \\ 0 & 1 & l & 0 & -1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A \\ N_A \\ \phi_A \\ U_C \\ N_C \\ \phi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

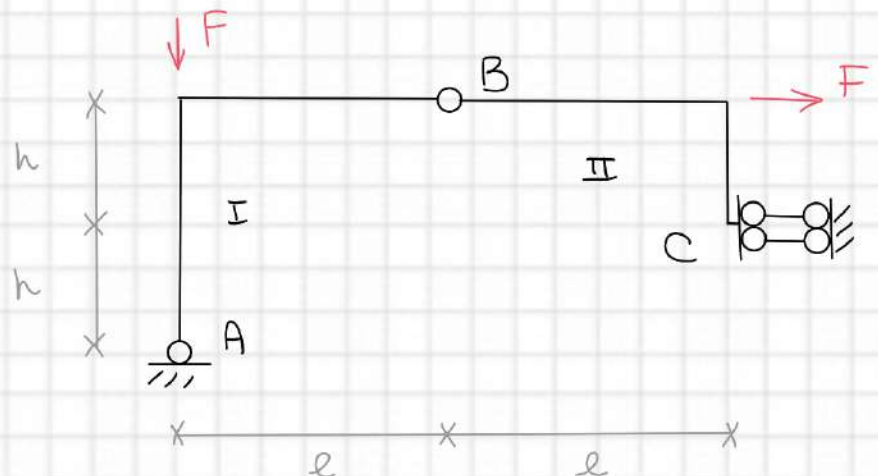
Rendo la matrice **A** triangolare:

- inverte colonna 4 e 5 (det cambia di segno),
- sommo alla riga 3 la riga 5,
- sottraggo alla riga 3 la riga 6 moltiplicata per h ,
- sottraggo alla riga 3 la riga 6 moltiplicata per l .

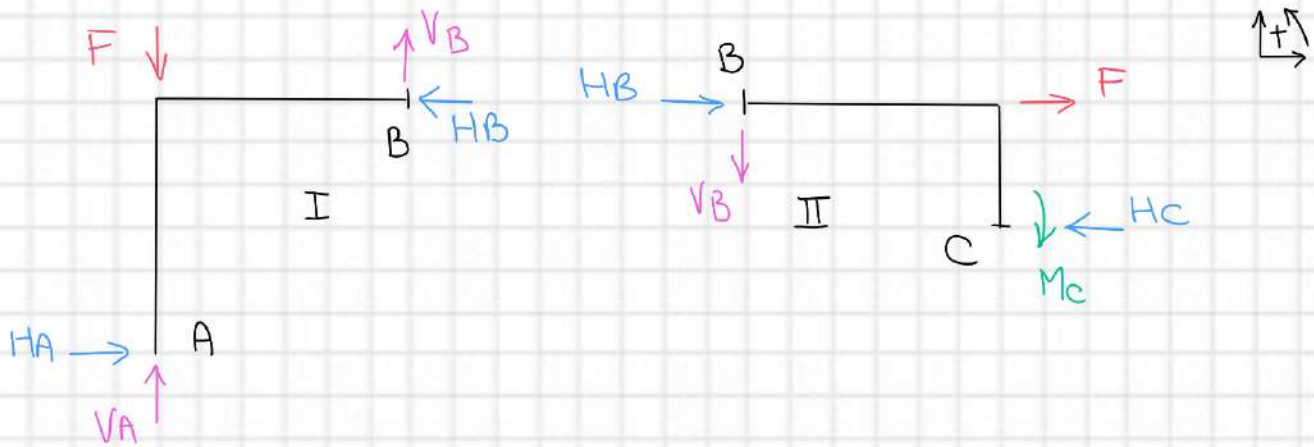
$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -2h \neq 0$$

la struttura è isostatica se $h > 0$.

ANALISI STATICA



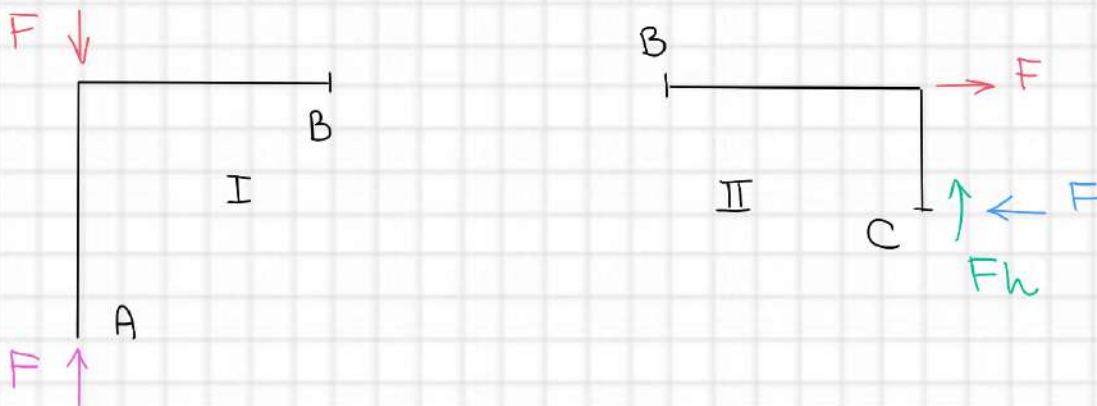
reazioni vincolari



equazioni di equilibrio (polo A per l'asta I - polo B per l'asta II)

$$\left\{ \begin{array}{l} H_A + H_B = 0 \\ -F + V_A + V_B = 0 \\ V_B l - H_B 2h = 0 \\ -H_C - H_B + F = 0 \\ -V_B = 0 \\ -H_C h - M_C = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_A = 0 \\ V_A = F \\ H_B = 0 \\ H_C = F \\ V_B = 0 \\ M_C = -Fh \end{array} \right.$$

struttura con reazioni vincolari



verifica

$$\sum F_{\bar{x}} = 0 \quad \text{ok!}$$

$$\sum F_{\bar{y}} = 0 \quad F - F = 0 \quad \text{ok!}$$

$$\sum M_B^I = 0 \quad Fl - Fl = 0 \quad \text{ok!}$$

$$\sum F_{\bar{x}}^{\text{II}} = 0 \quad F - F = 0 \quad \text{ok!}$$

$$\sum F_{\bar{y}}^{\text{II}} = 0 \quad \text{ok!}$$

$$\sum M_C^{\text{II}} = 0 \quad Fh - Fh = 0 \quad \text{ok!}$$

ES4: fare analisi cinematica e statica della seguente struttura.

ANALISI CINEMATICA

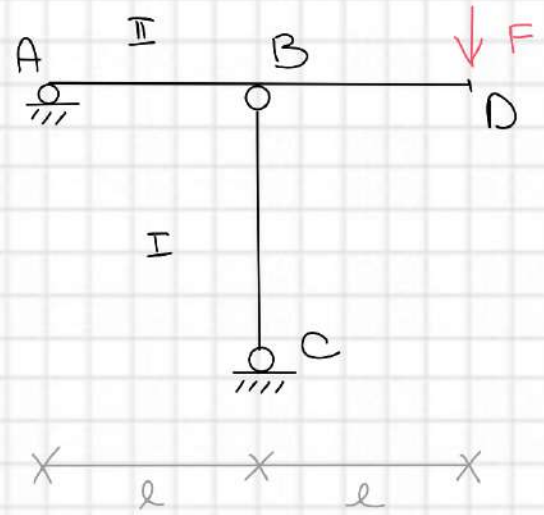
Formula $[3t - s = l - i]$

$$t = 2$$

$$\Rightarrow 3t - s = 0 \Rightarrow l - i = 0$$

$$s = 6$$

Posso vedere l'asta I come una biella:



è evidente che $l = 0$.

ANALISI STATICA

La posso risolvere senza scrivere le equazioni:

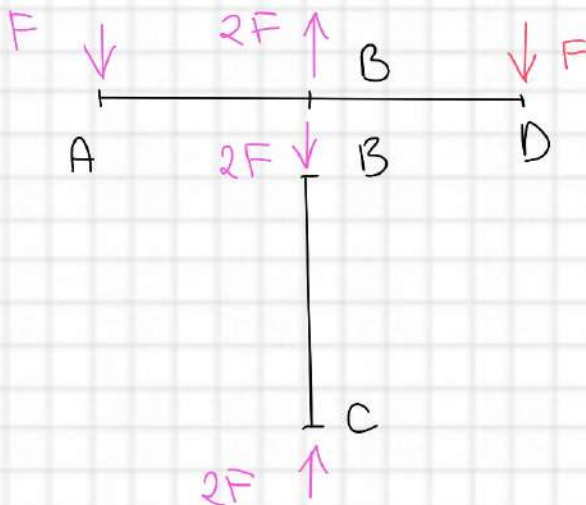
reazioni vincolari



$$M_A = 0 : V_B l - F 2l = 0$$

$$V_B = 2F$$

$$\Rightarrow V_A = -F$$

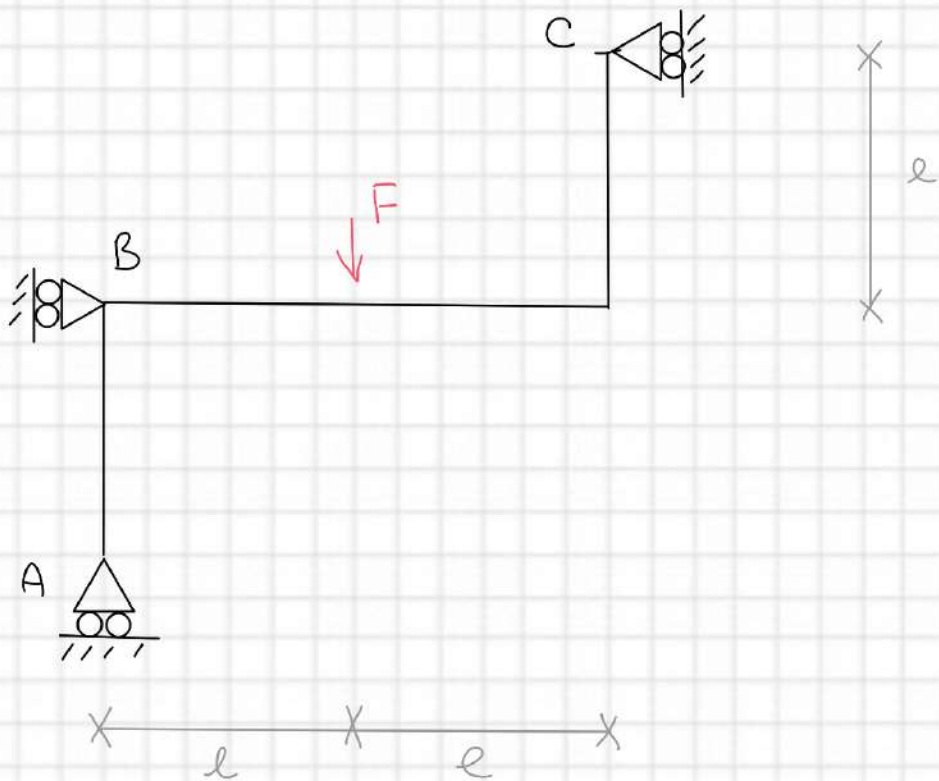
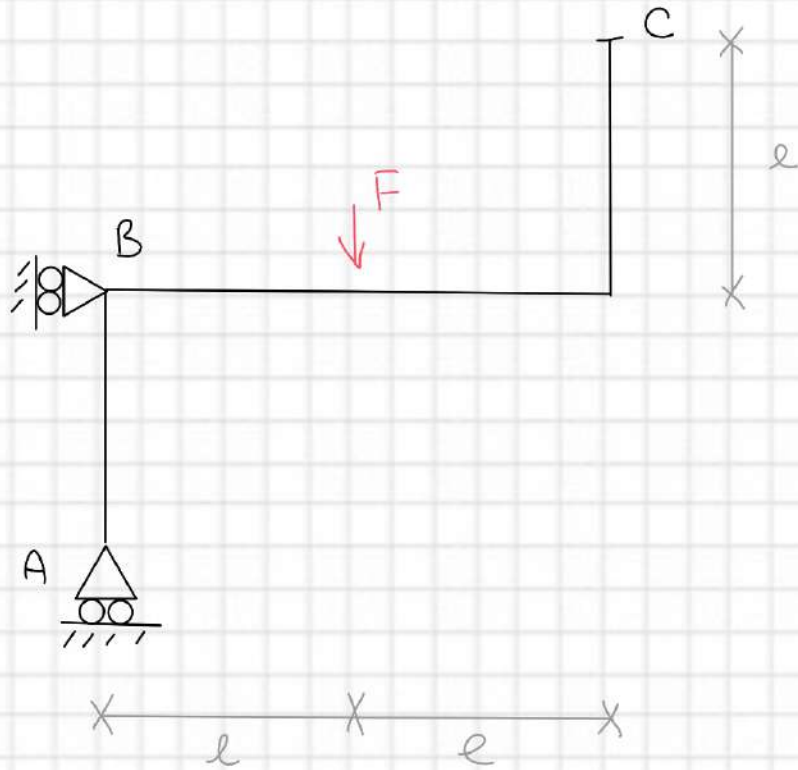


ottengo che l'asta verticale è caricata a compressione

PROVA D'ESAME 26/02/2021

Aggiungere un carrello nell'estremo C nella struttura illustrata in figura (asta singola), al fine di renderla isostatica, dandone dimostrazione tramite analisi cinematica.

Svolgere poi l'analisi statica e diagrammare le caratteristiche di sollecitazione.



ANALISI CINEMATICA

Formula $[3t - s = l - i]$

$$t = 1$$

$$\Rightarrow 3t - s = 0$$

$$\Rightarrow l - i = 0$$

$$s = 2$$

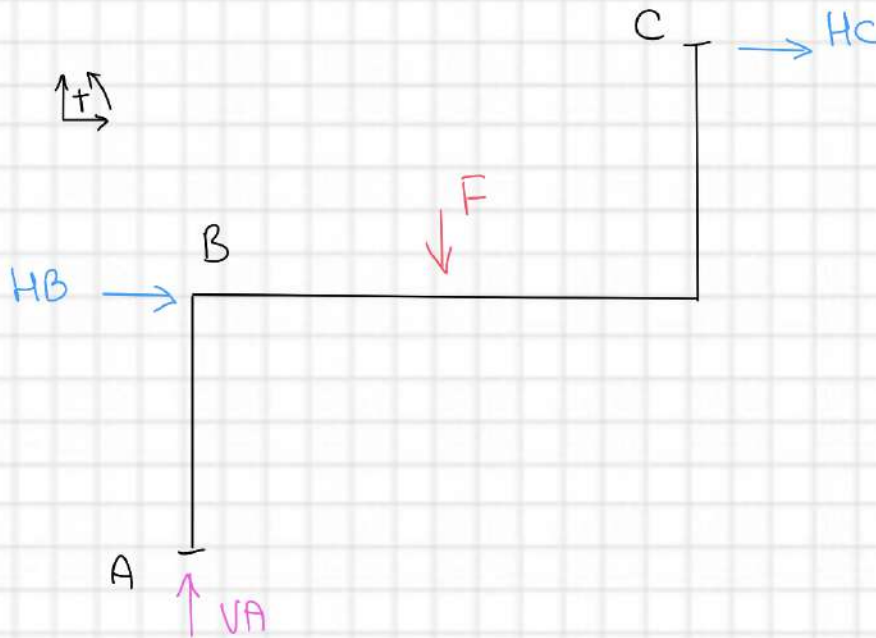
Metodo grafico [centri di rotazione]



d non passa per B
 $\Rightarrow$ struttura isostatica

ANALISI STATICA

reazioni vincolari



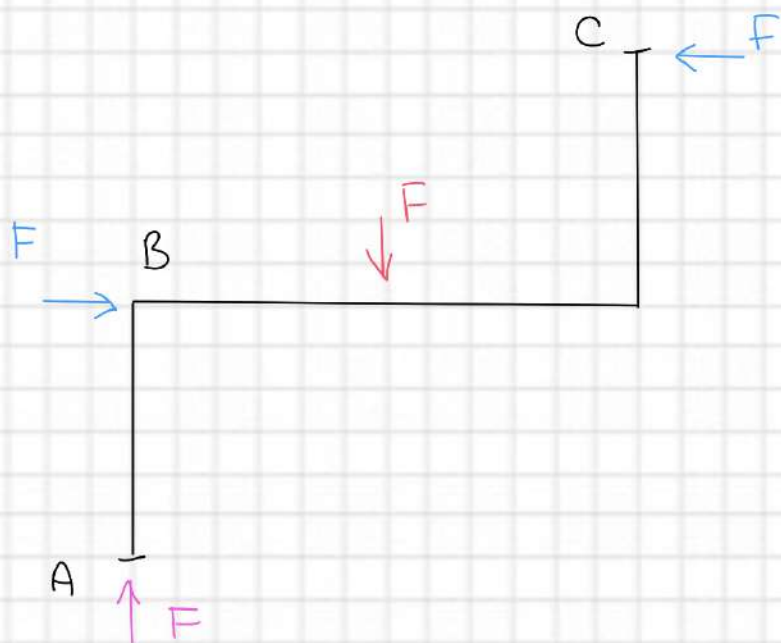
equazioni di equilibrio (polo A)

$$\begin{cases} H_B + H_c = 0 \\ V_A - F = 0 \\ -H_B l - F l - H_c 2l = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_B = -H_c \\ V_A = F \\ -H_c l = F l \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_B = F \\ V_A = F \\ H_c = -F \end{cases}$$

struttura con reazioni vincolari



verifica

$$\sum F_x = 0 \quad F - F = 0 \quad \text{ok'}$$

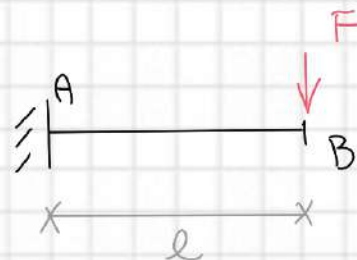
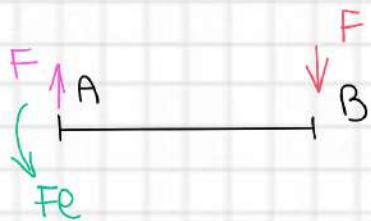
$$\sum F_y = 0 \quad F - F = 0 \quad \text{ok'}$$

$$\sum M_B = 0 \quad -F\ell + F\ell = 0 \quad \text{ok'}$$

DIAGRAMMA DELLE CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

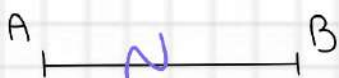
ES: fare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione di una mensola caricata in punta.

ANALISI STATICA



CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

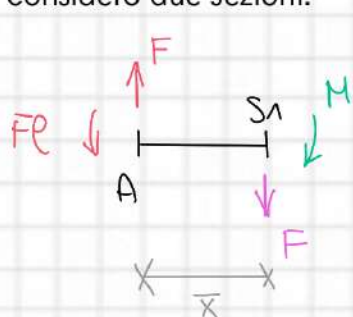
sforzo normale $\leftarrow \square \rightarrow$



lo sforzo assiale è nullo

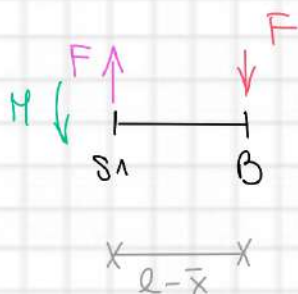
sforzo di taglio $\uparrow \square \downarrow$

considero due sezioni:



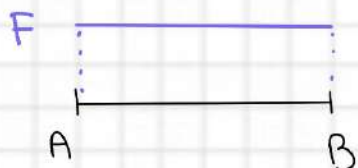
$$\sum M_{S1} = 0 \quad F l - F \bar{x} - M = 0$$

$$\Rightarrow M = F(l - \bar{x})$$



$$\sum M_{S1} = 0 \quad -F(l - \bar{x}) + M = 0$$

$$\Rightarrow M = F(l - \bar{x})$$



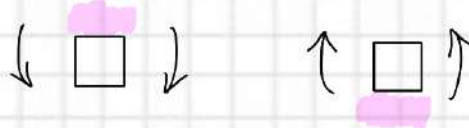
sforzo flettente

$$M = F(l - \bar{x})$$

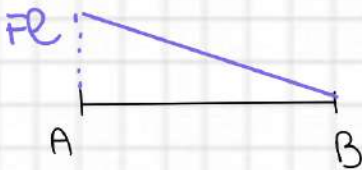
$$M(0) = Fl$$

$$M(l) = 0$$

Si disegna dalla parte delle fibre tese:

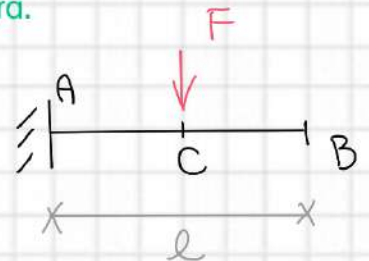
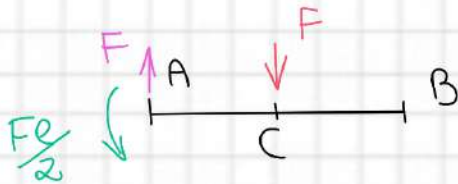


Nel nostro caso le fibre tese sono le superiori:



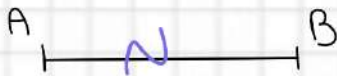
ES: fare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione della seguente struttura.

ANALISI STATICA



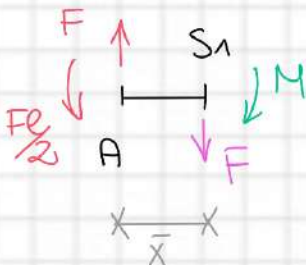
CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

sforzo normale $\leftarrow \square \rightarrow$

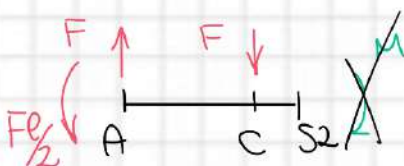


sforzo di taglio $\uparrow \square \downarrow$

considero due sezioni:



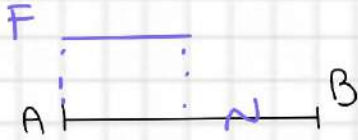
$$M_{S1} = \frac{Fl}{2} - F\bar{x} = F\left(\frac{l}{2} - \bar{x}\right)$$



$$M_C = 0 \quad \frac{Fl}{2} - \frac{Fl}{2} = 0 \quad \text{è già in equilibrio}$$



è scarico



sforzo flettente (fibre tese superiori) $\downarrow \square \downarrow$

$$M = F \left(\frac{\ell}{2} - \bar{x} \right)$$

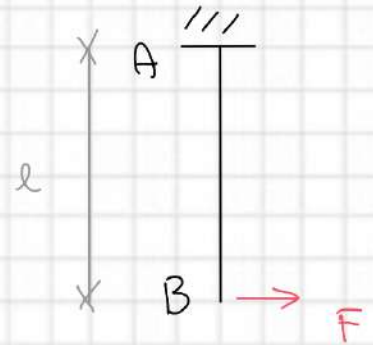
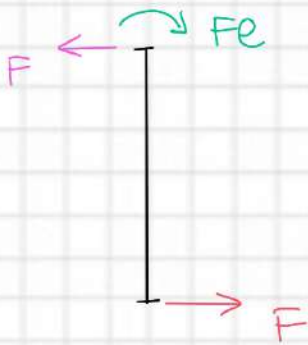
$$M(0) = F \frac{\ell}{2}$$

$$M\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0$$



ES: fare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione della seguente struttura.

ANALISI STATICA

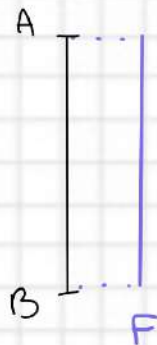


CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

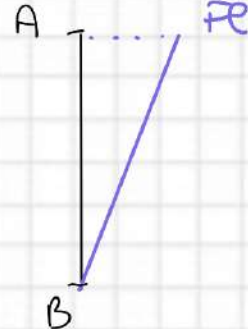
sforzo normale



sforzo di taglio $\leftarrow \square \rightarrow$

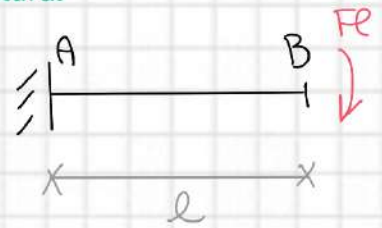
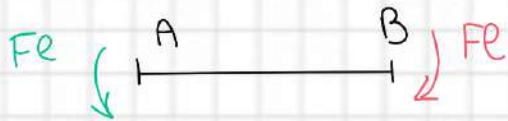


sforzo flettente $\leftarrow \square \rightarrow$



ES: fare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione della seguente struttura.

ANALISI STATICA



CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

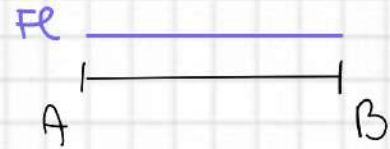
sforzo normale



sforzo di taglio

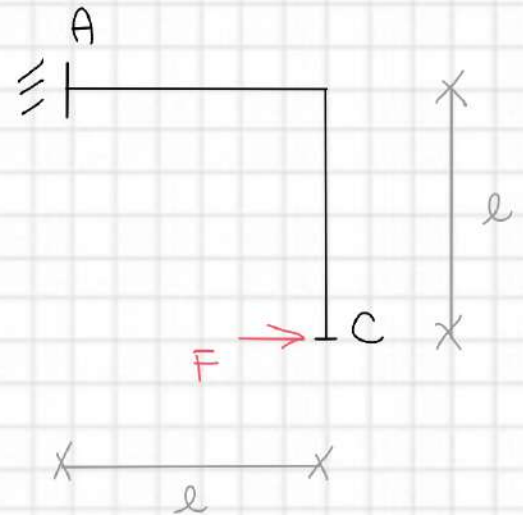
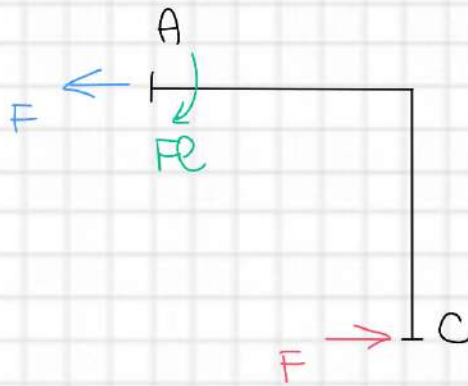


sforzo flettente



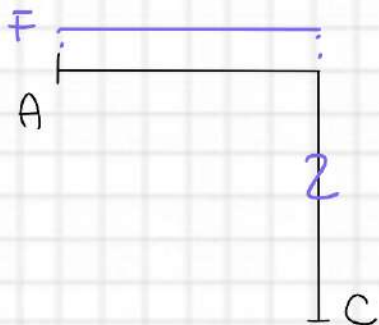
ES: fare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione della seguente struttura.

ANALISI STATICA

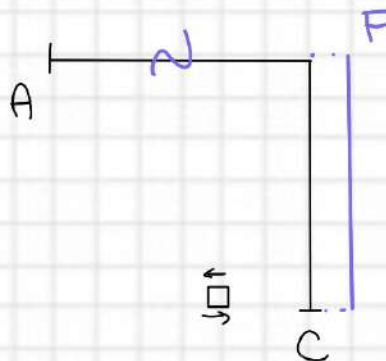


CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

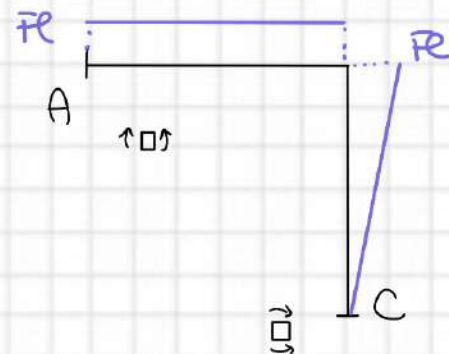
sforzo normale $\leftarrow \square \rightarrow$



sforzo di taglio



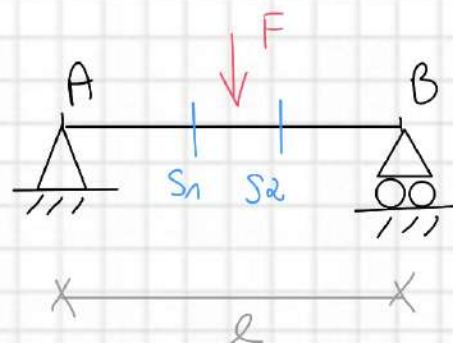
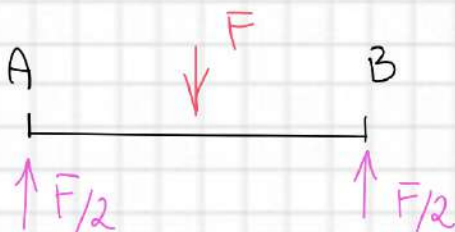
sforzo flettente



ESERCIZI

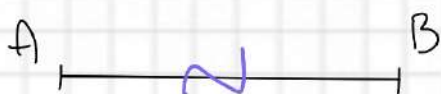
ES1: svolgere l'analisi delle caratteristiche di sollecitazione della seguente figura.

ANALISI STATICA

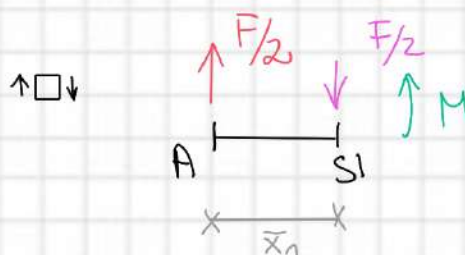
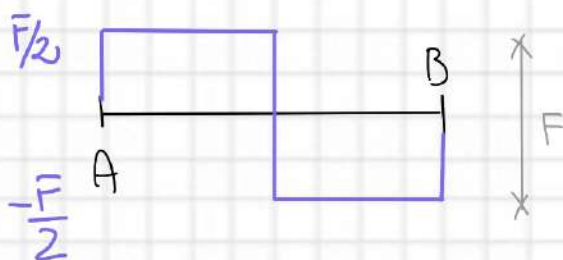


CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

sforzo normale

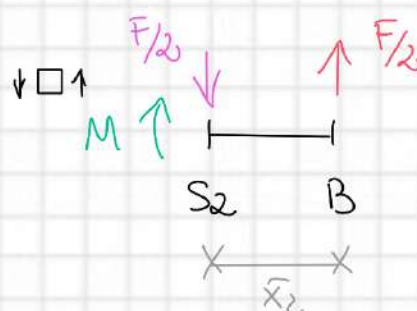


sforzo di taglio



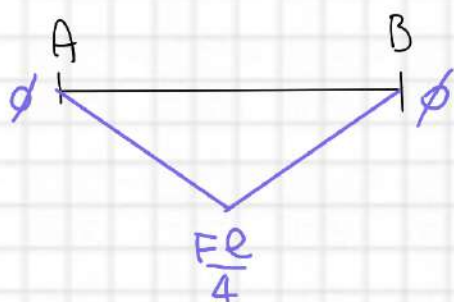
$$\sum M_{S1} = 0$$

$$\Rightarrow M = \frac{F}{2} \bar{x}_1$$



$$\sum M_B = 0$$

$$\Rightarrow M = \frac{F}{2} \bar{x}_2$$

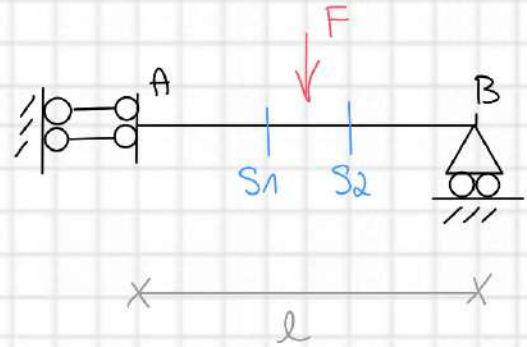
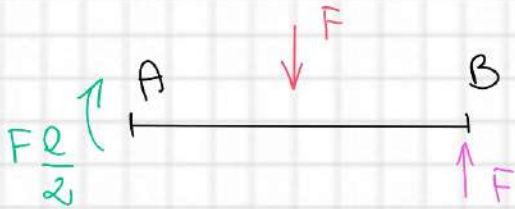
sforzo flettente $\uparrow \square \uparrow$ 

In A agisce una cerniera $\Rightarrow$ non reagisce alla rotazione
 In B agisce un carrello $\Rightarrow$ non reagisce alla rotazione
 Vedo che in S1 il momento aumenta linearmente con l'aumentare della distanza da A

$$M = \frac{F}{2} \frac{l}{2} = \frac{Fl}{4}$$

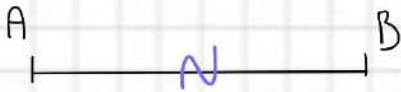
ES2: svolgere l'analisi delle caratteristiche di sollecitazione della seguente figura.

ANALISI STATICA

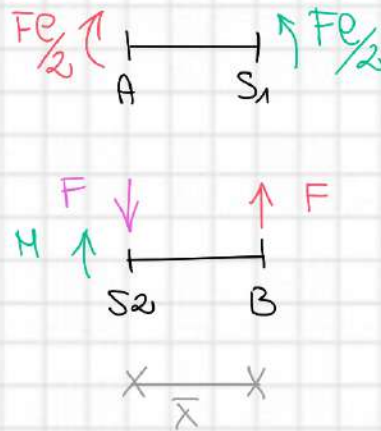
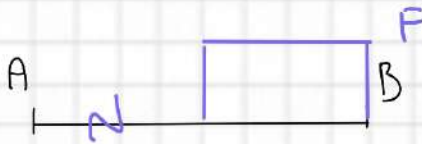


CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

sforzo normale



sforzo di taglio



$$-M + F\bar{x} = 0$$

$$M = F\bar{x}$$

sforzo flettente



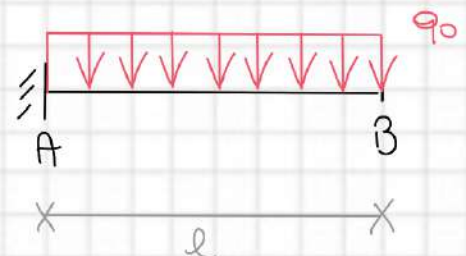
In B vale 0 dato che c'è un carrello quindi non esiste una reazione al momento

ES3: svolgere l'analisi delle caratteristiche di sollecitazione della seguente figura.

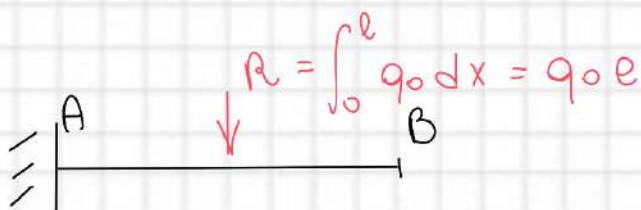
ANALISI STATICA

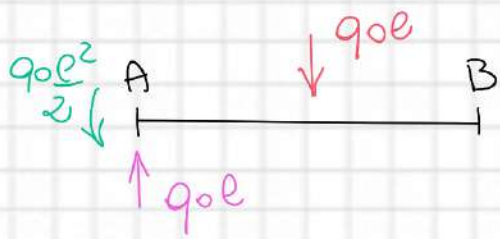
Sfrutto l'analogia statica con il carico concentrato

NB vale solo per l'analisi statica!!

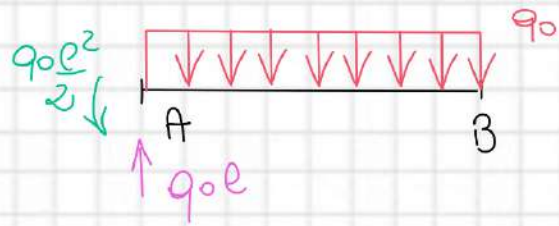


$$q_0 = \frac{F}{l}$$





$\Rightarrow$

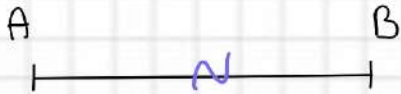


CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

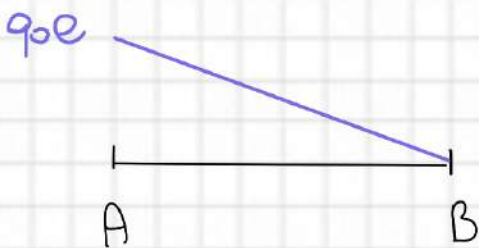
$\uparrow \uparrow \square \downarrow \uparrow$

$\uparrow + \curvearrowright$

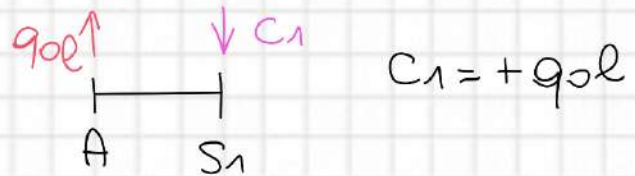
sforzo normale



sforzo di taglio



$$T(x) = \int q(x) dx = -q_0 x + C_1$$



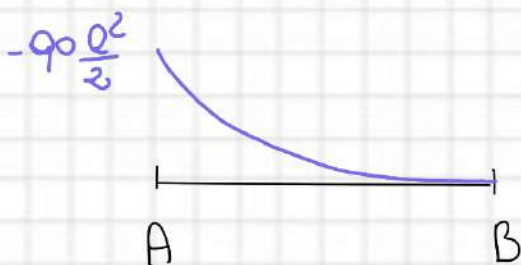
$$C_1 = +q_0 l$$

$$T(x) = -q_0 x + q_0 l$$

$$T(0) = q_0 l$$

$$T(l) = 0$$

sforzo flettente



$$M'(x) = T(x) = -q_0 x + q_0 l$$

$$M(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 l x + C_2$$

so che:

$$M(l) = 0$$

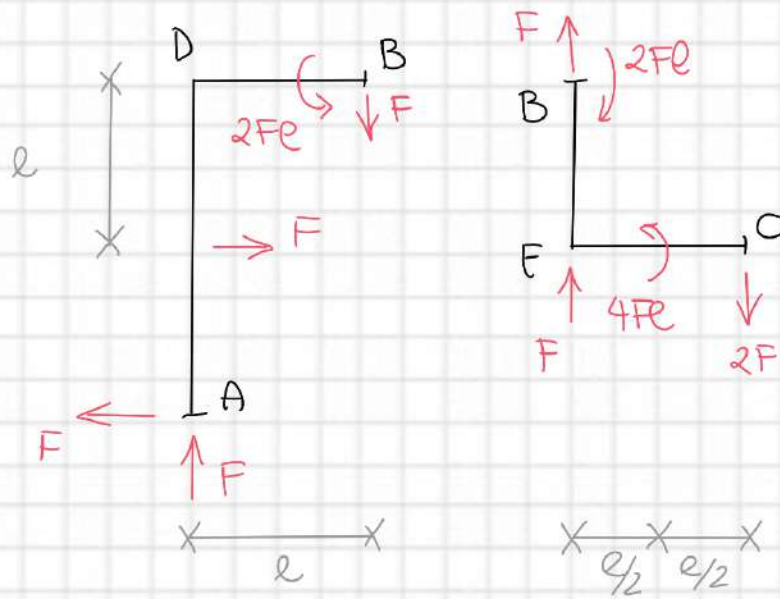
dato che B è un estremo libero

$$\Rightarrow C_2 = -q_0 \frac{l^2}{2}$$

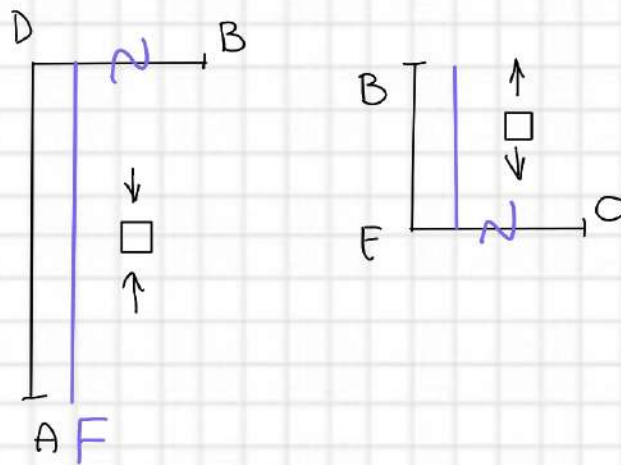
$$\Rightarrow M(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 l x - q_0 \frac{l^2}{2}$$

$$M(0) = -q_0 \frac{l^2}{2}$$

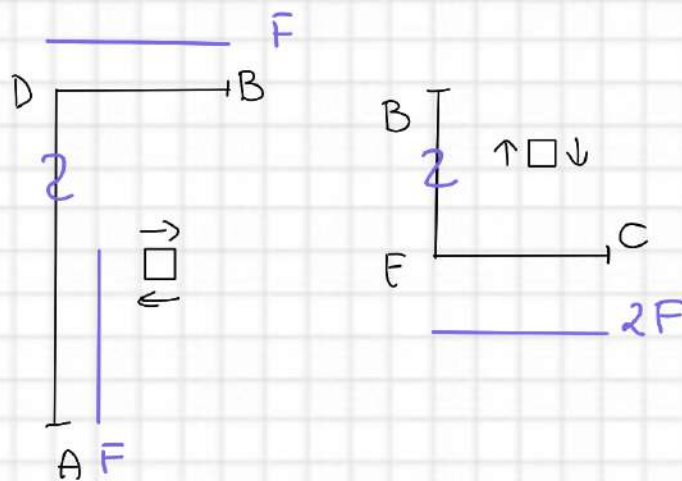
ES4: svolgere l'analisi delle caratteristiche di sollecitazione della seguente figura.



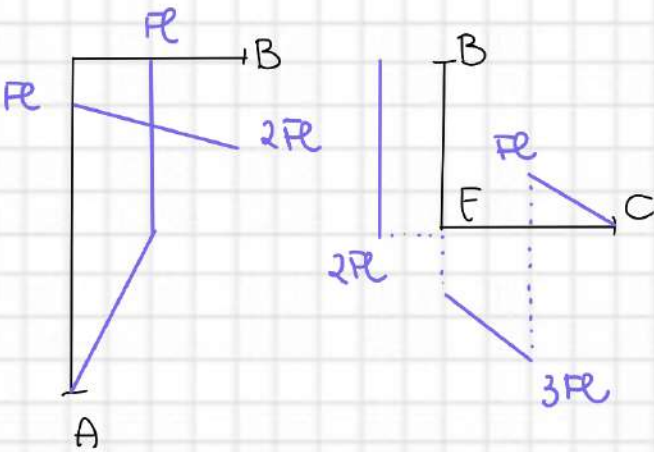
sforzo normale



sforzo di taglio



sforzo flettente



ESERCIZI

ES1:

$$r = 1,26 \text{ cm}$$

 σ, ϵ

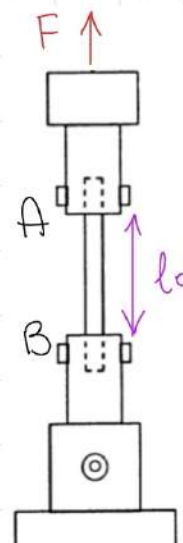
$$l_0 = 30 \text{ cm (AB iniziale)}$$

$$l_1 = 31,5 \text{ cm (AB finale e } F = 1 \text{ kN)}$$

$$\epsilon = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{31,5 \text{ cm} - 30 \text{ cm}}{30 \text{ cm}} = 0,05$$

allungamento relativo

quantità
adimensionale



Il 5% è il limite prima del quale si parla di piccole deformazioni.

$$\sigma = \frac{F}{A_0} = \frac{1000 \text{ N}}{5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 2 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 2 \text{ MPa} \rightarrow \text{sforzo ingegneristico}$$

↳ sezione trasversale

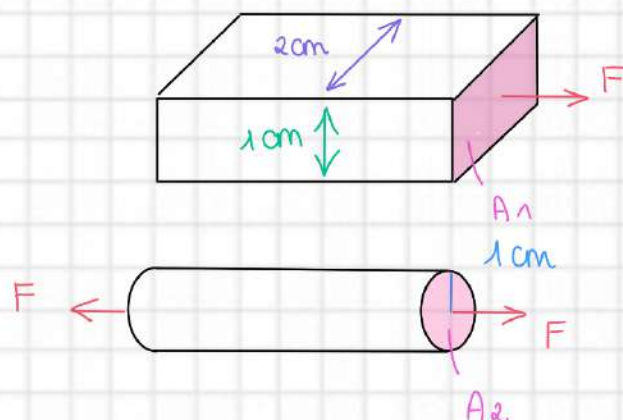
ES2: Trazione con:

$$F = 20 \text{ kN}$$

$$E_1 = 70 \text{ GPa (alluminio)}$$

$$E_2 = 200 \text{ GPa (acciaio)}$$

$$l_1 = l_2 = 30 \text{ cm}$$

 $\sigma_1, \epsilon_1, l_1$
 $\sigma_2, \epsilon_2, l_2$


$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1} = \frac{20.000 \text{ N}}{(0,01 \cdot 0,02) \text{ m}^2} = 100 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{F}{A_2} = \frac{200.000 \text{ N}}{3,14 \cdot 0,01^2 \text{ m}^2} = 63,7 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 63,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma = E \cdot \epsilon \Rightarrow \epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{100 \cdot 10^6 \text{ Pa}}{70 \cdot 10^9 \text{ Pa}} = 1,43 \cdot 10^{-3}$$

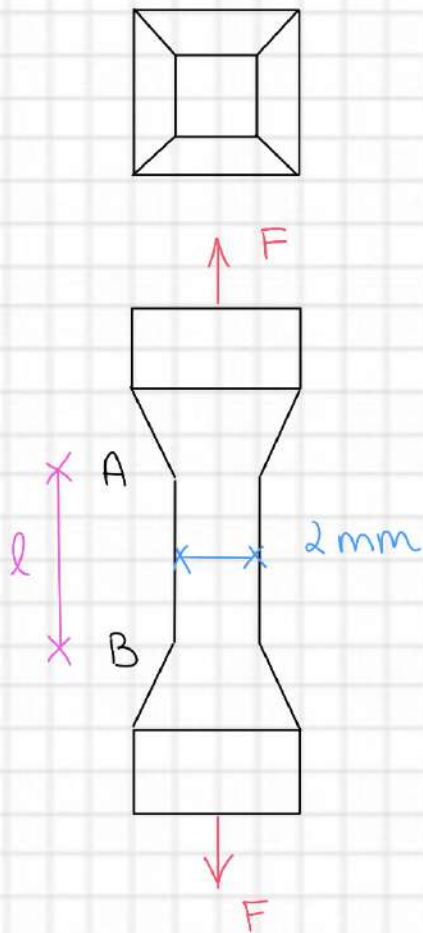
$$\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{63,7 \cdot 10^6 \text{ Pa}}{200 \cdot 10^9 \text{ Pa}} = 0,32 \cdot 10^{-3}$$

⇒ l'acciaio si deforma meno.

$$l_1^1 = l_1^0 (1 + \epsilon_1) = 30,042 \text{ cm}$$

$$l_2^1 = l_2^0 (1 + \epsilon_2) = 30,096 \text{ cm}$$

ES3: 3 provini di osso corticale



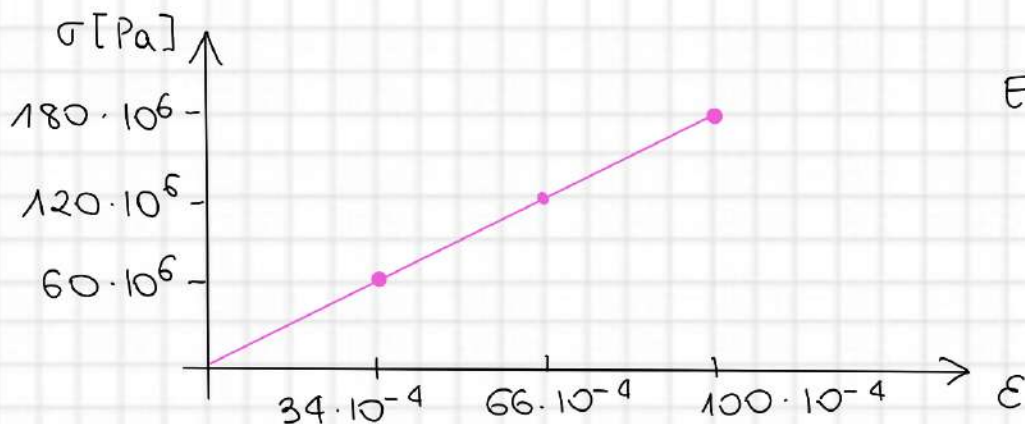
F [N]	l [mm]	PROVINO
0	5	
240	5,017	1
480	5,033	2
720	5,05	3

? σ , ϵ , E nei tre casi

$$A = (0,002 \cdot 0,002) \text{ m}^2 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

F [N]	$\sigma = F/A$ [Pa]	l [mm]	$\epsilon = (l - l_0)/l_0$	#
$\emptyset$	$\emptyset$	5	$\emptyset$	
240	$60 \cdot 10^6$	5,017	0,0034	1
480	$120 \cdot 10^6$	5,033	0,0066	2
720	$180 \cdot 10^6$	5,05	0,01	3

Il modulo elastico lo posso calcolare facendo una interpolazione $\rightarrow E = \text{pendenza}$



$$E = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{60 \cdot 10^6}{34 \cdot 10^{-4}} \approx 18 \text{ GPa}$$

LINEA ELASTICA

Consideriamo un corpo deformabile nell'ipotesi di piccole deformazioni. Vogliamo trovare l'abbassamento della trave soggetta a forza.



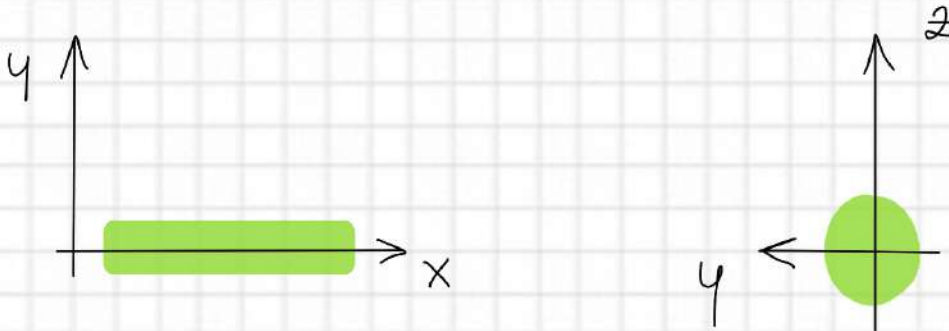
DEFINIZIONE GEOMETRICA DI TRAVE

Corpo 3D che ha due dimensioni trascurabili rispetto alla terza $\rightarrow$ problema 1D.

Distinguiamo tra asse della trave (asse x) e sezione trasversale (piano xy).

Consideriamo solo problemi per trave piana:

- assumiamo simmetria rispetto al piano xy (sia per carichi sia per sezione trasversale)
- y e z sono assi principali di inerzia
- sviluppiamo tutti i problemi considerando solo gli assi xy



Ipotesi:

1. Eulero Bernulli: le sezioni si mantengono piane e perpendicolari all'asse della trave



2. Problema piano negli sforzi $\rightarrow$ deformazione assiale + flessione nel piano

3. Piccole deformazioni e piccoli spostamenti

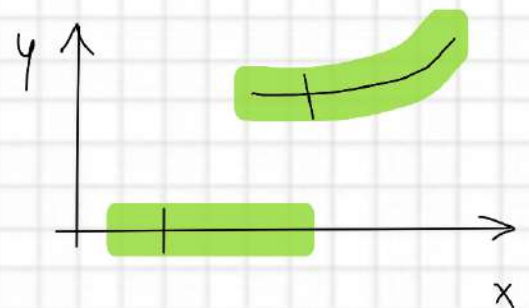
CINEMATICA

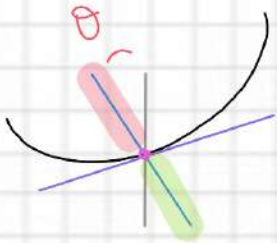
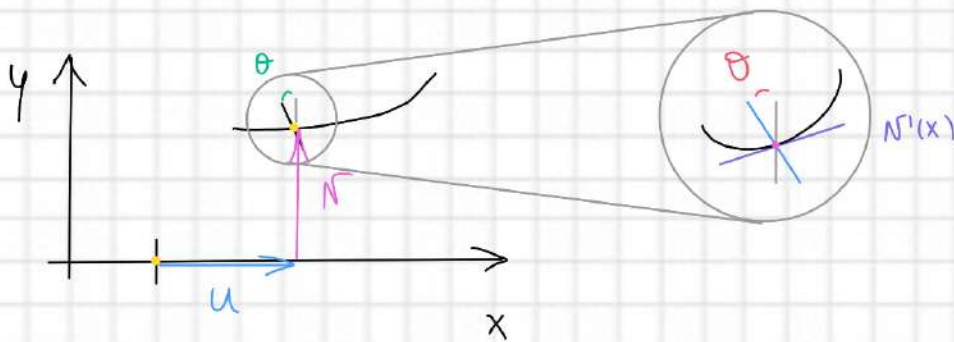
$u(x)$: spostamento assiale

$w(x)$: abbassamento (inflexione)

$\theta(x)$: rotazione

$\theta = w'$ $\rightarrow$ secondo l'ipotesi Eulero Bernulli





I punti **qui** hanno uno spostamento assiale maggiore rispetto a •
 I punti **qui** hanno uno spostamento assiale minore rispetto a •

Lo spostamento assiale u di un generico punto della sezione lungo l'asse è funzione di y :

$$u = u_0 - y \cdot \theta = u_0 - y N'$$

$\theta > 0$ se è orario rispetto alla verticale (y negative)

Deformazione assiale: ϵ_0

Deformazione della sezione: $\epsilon_{xx} = \frac{du(x)}{dx} = u' = \epsilon_0 - y N''$ CURVATURA DELL'ASSE DELL'ASTA

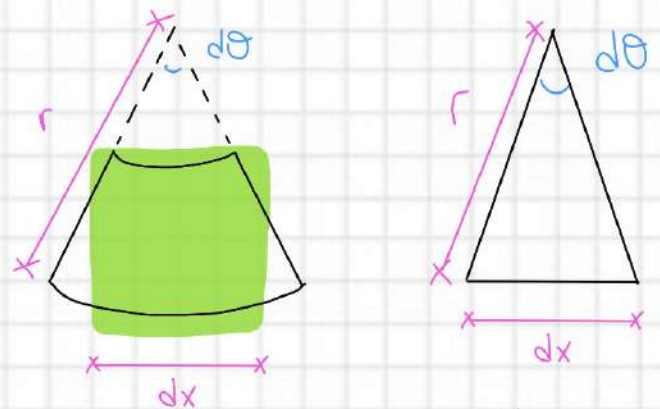
Curvatura: $\chi = \frac{1}{r}$

Nell'ipotesi di piccole deformazioni:

$$\frac{dx}{2} = r \tan\left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx dx = r d\theta$$

$$dx = r d\theta \rightarrow \frac{1}{r} \chi = \frac{d\theta}{dx}$$

$$\chi = \theta' = N''$$



Cerchiamo di capire meglio:

Consideriamo due curve, una con una curvatura maggiore rispetto all'altra:

Caso 1



$$r d\chi_1 > r d\chi_2$$

$$\chi_1 < \chi_2$$

$$\epsilon_{xx1} < \epsilon_{xx2}$$

Caso 2



HP PICCOLE DEFORM.

EQUILIBRIO

STRESS

σ è un tensore del II ordine simmetrico; assumiamo come non nulle le componenti σ_{xx} , τ_{yx}
Come conseguenza abbiamo tre forze interne o caratteristiche di sollecitazioni:

Azione assiale

$$N = \int_A [\sigma_{xx}] dA$$

$$\sigma_{xx} = \left[\frac{F}{Q} \right] \quad \text{integrando su una sezione ottengo una forza} \rightarrow \text{c'è congruenza}$$

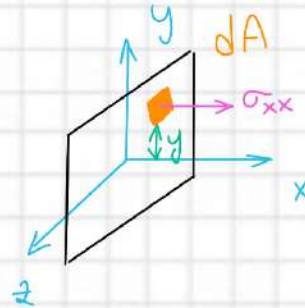
Azione di taglio

$$T = \int_A [\tau_{yx}] dA$$

τ_{yx} è la componente del tensore degli sforzi nella direzione y che agisce sulla faccia di normale x

Momento flettente

$$M = - \int_A [y \sigma_{xx}] dA$$



EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

$$\begin{cases} N' = p(x) \\ T' = q(x) \\ M' = T(x) \end{cases}$$

N.B. p e q sono i carichi distribuiti assiali e trasversali considerati positivi se diretti come gli assi.

Usiamo un modello di materiale elastico $\rightarrow$ legiamo sforzo e deformazione attraverso la relazione:

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} \quad \rightarrow \text{legame costitutivo}$$

Ricordiamo inoltre dalla cinematica la relazione:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_0 - y \chi$$

Sostituendo si ottiene:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A [\sigma_{xx}] dA = \int_A E \epsilon_{xx} dA = \int_A E (\epsilon_0 - \chi y) dA \\
 &= E \epsilon_0 A - E \chi \int_A y dA \\
 &= E \epsilon_0 A
 \end{aligned}$$

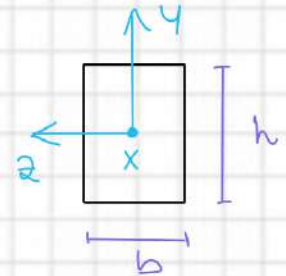
MOMENTO STATICO RISP. Z
 $S = \int y dA = 0$ x ASSI baricentrici

→ fisicamente è congruente a quello che ci aspettiamo, ad esempio se il modulo di Young aumenta, lo sforzo assiale aumenta → ha senso.

$$\begin{aligned}
 M &= - \int_A \sigma_{xx} y dA = - \int_A E \epsilon_{xx} y dA = - \int_A E (\epsilon_0 - \chi y) y dA \\
 &= - E \epsilon_0 \int_A y dA + E \chi \int_A y^2 dA = - E \epsilon_0 S + E \chi I \\
 &= E \chi I
 \end{aligned}$$

$I = \frac{bh^3}{12}$

MOM. INERZIA RISP. Z



→ fisicamente è congruente a quello che ci aspettiamo.

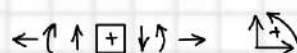
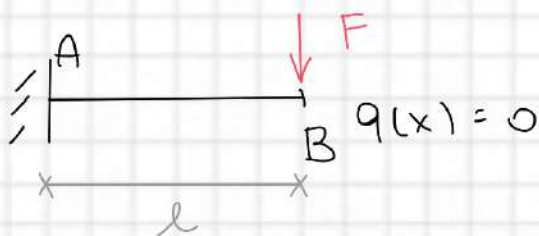
Questa equazione descrive il momento flettente secondo:

- le proprietà del materiale (E)
- una quantità geometrica (χ)
- un valore che dà informazioni sulla sezione della trave (I)

A noi interessa trovare l'abbassamento v. Si ha:

$$\begin{aligned}
 M(x) &= E \chi I = E I v'' \\
 M'(x) &= E I v''' = T(x) \\
 M''(x) &= E I v'''' = T'(x) = q(x) \\
 \Rightarrow E I v'''' &= q(x)
 \end{aligned}$$

ES: Trave incastrata caricata di punta



$$EI \nu'''' = q(x)$$

$$EI \nu''' = C_1$$

(taglio)

$$EI \nu'' = C_1 x + C_2$$

(momento)

$$EI \nu' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

(rotazione $\theta = \nu'$)

$$EI \nu = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

(abbassamento)

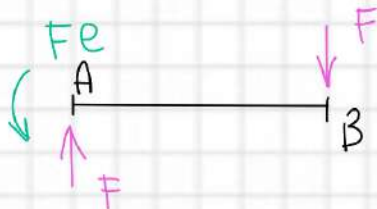
Devo trovare le costanti $\rightarrow$ utilizzo le condizioni al bordo:

Incastro in $x = 0$

$$\nu(0) = 0 \quad \text{abbassamento nullo nell'incastro}$$

$$\theta(0) = 0 = \nu' \quad \text{rotazione nulla nell'incastro}$$

Estremo libero in $x = l$



$$T(l) = F$$

$$M(l) = 0$$

Ricapitolando abbiamo trovato le condizioni:

$$\begin{cases} \nu(0) = 0 \\ \nu'(0) = 0 \\ M(l) = 0 \\ T(l) = F \end{cases}$$

Le equazioni precedentemente ricavate sono:

$$\begin{cases} EI \nu''' = C_1 \\ EI \nu'' = C_1 x + C_2 \\ EI \nu' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \\ EI \nu = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \end{cases}$$

Si ottiene:

$$\begin{cases} C_4 = 0 \\ C_3 = 0 \\ C_1 = F \\ M(0) = 0 = F\ell + C_2 \Rightarrow C_2 = -F\ell \end{cases}$$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{EI} \left(-\frac{Fx^3}{6} - F\ell \frac{x^2}{2} \right)$$

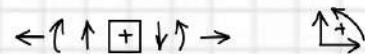
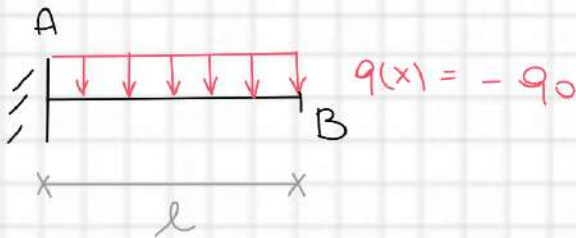
L'abbassamento massimo:

$$N(\ell) = -\frac{F\ell^3}{3EI}$$

Analisi dimensionale:

$$[\ell] = \frac{[F] [\ell^3] [\ell^2]}{[F] [\ell^4]} = [\ell] \quad \text{OK!}$$

ES: consideriamo ora un carico distribuito



$$EI N^{IV} = -q_0$$

$$EI N''' = -q_0 x + C_1$$

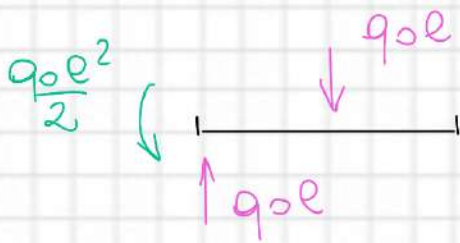
$$EI N'' = -q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$EI N' = -q_0 \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EI N = -q_0 \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{EI} \left(-q_0 \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \right)$$

Condizioni al bordo:



$$N(0) = 0$$

$$N'(0) = 0$$

$$M(l) = 0$$

$$T(0) = q_0 l$$

Si ottiene:

$$C_4 = 0$$

$$C_3 = 0$$

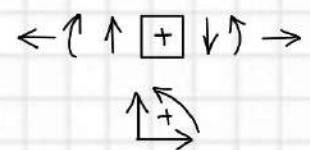
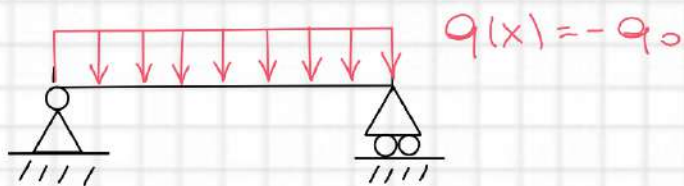
$$C_2 = q_0 \frac{l^2}{2} - C_1 l \rightarrow C_2 = \frac{q_0 l^2}{2} - q_0 l^2 = -\frac{q_0 l^2}{2}$$

$$T(0) = q_0 l \Rightarrow C_1 = q_0 l$$

$$N = \frac{1}{EI} \left(-\frac{q_0}{24} x^4 + \frac{q_0 l}{6} x^3 - \frac{q_0 l^2}{2} \frac{x^2}{2} \right)$$

$$N_{\max} = N(l) = -\frac{q_0 l^4}{8 EI}$$

ES: studiare la seguente struttura



$$EI N^{IV} = -q_0$$

$$EI N''' = -q_0 x + C_1$$

$$EI N'' = -q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

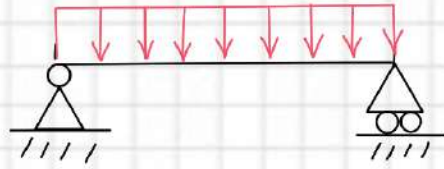
$$EI N' = -q_0 \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EI N = -q_0 \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Condizioni al bordo:

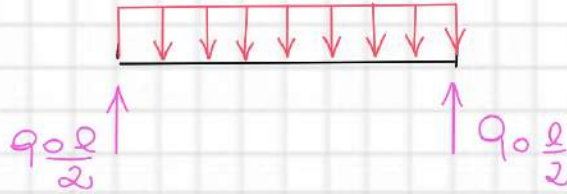
$$M(0) = 0$$

$$V(0) = 0$$



$$M(l) = 0$$

$$V(l) = 0$$



$$\Rightarrow C_4 = 0$$

$$C_2 = 0$$

$$-\frac{q_0 l^4}{24} + C_1 \frac{l^3}{6} + C_3 l = 0$$

$$-q_0 \frac{l^2}{2} + C_1 l = 0 \rightarrow C_1 = q_0 \frac{l}{2}$$

$$C_3 = \frac{q_0 l^3}{24} - \frac{C_1 l^2}{6} = -\frac{q_0 l^3}{24}$$

$$\Rightarrow N(x) = \frac{1}{EI} \left(-q_0 \frac{x^4}{24} + q_0 \frac{l x^3}{12} - \frac{q_0 l^3 x}{24} \right)$$

$$N_{\max} = \frac{1}{EI} \left(-q_0 l^4 \frac{5}{348} \right)$$

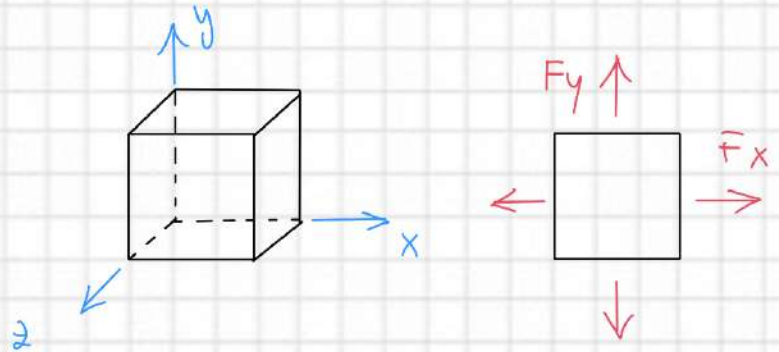
ESERCIZI

ES1

cubo soggetto a trazione biassiale lungo x e y

 $l = 10 \text{ cm}$ $F_x = F_y = F = 2 \cdot 10^6 \text{ N}$ $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ $\nu = 0,5 \rightarrow$ coefficiente di Poisson

? Trovare le dimensioni del cubetto deformato

OSS: non abbiamo componenti di taglio $\rightarrow$ i tensori hanno tre componenti:

$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}, \quad \epsilon = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z\}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{F_x}{A} = \frac{F}{l^2} \\ \sigma_y = \frac{F_y}{A} = \frac{F}{l^2} \\ \sigma_z = \emptyset \rightarrow \text{faccia scarica} \end{cases}$$

Mi serve trovare le deformazioni, passo dal legame costitutivo (modello di materiale elastico lineare isotropo alla Green):

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{cases} \quad \begin{cases} \epsilon_x = \frac{F}{l^2 E} - \frac{\nu}{E} \frac{F}{l^2} \\ \epsilon_y = \frac{F}{l^2 E} - \frac{\nu}{E} \frac{F}{l^2} \\ \epsilon_z = -\frac{\nu}{E} \left(2 \frac{F}{l^2} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{F}{E l^2} (1 - \nu) = \\ \epsilon_y = \frac{F}{E l^2} (1 - \nu) \\ \epsilon_z = -2 \frac{\nu F}{E l^2} \end{cases}$$

→ in direzione z il cubetto si accorcia mentre nelle altre due direzioni si allunga, è quello che mi aspetto

Calcolo la dimensione di deformazione dell'angolo del cubetto lungo x:

$$\epsilon_x = \frac{l'x - l}{l} \Rightarrow l'x = l(1 + \epsilon_x) = l'y$$

ES2:

Trazione uniassiale lungo x

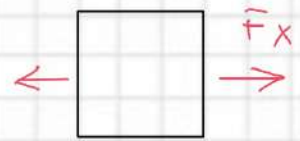
$l = 10 \text{ cm}$

$F_x = F_y = F = 2 \cdot 10^6 \text{ N}$

$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$

$\nu = 0,5 \rightarrow$ coefficiente di Poisson

? Trovare le dimensioni del cubetto deformato.



$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{F_x}{A} = \frac{F}{l^2} \\ \sigma_y = \emptyset \\ \sigma_z = \emptyset \end{cases} \rightarrow \text{facce scariche}$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{cases} \quad \begin{cases} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \\ \epsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_x \\ \epsilon_z = -\frac{\nu}{E} \sigma_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$$

$$\Rightarrow \nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

Il coefficiente di Poisson fisicamente mi rappresenta la contrazione che avrò trasversalmente alla direzione di trazione uniassiale. Se $\varepsilon_x > 0$ allora mi darà accorciamento della direzione y e z. Quindi il coefficiente di Poisson mi dà informazioni sulla contrazione del materiale soggetto a deformazione.

ES3:

Blocco di acciaio compresso in un sistema con parti indeformabili

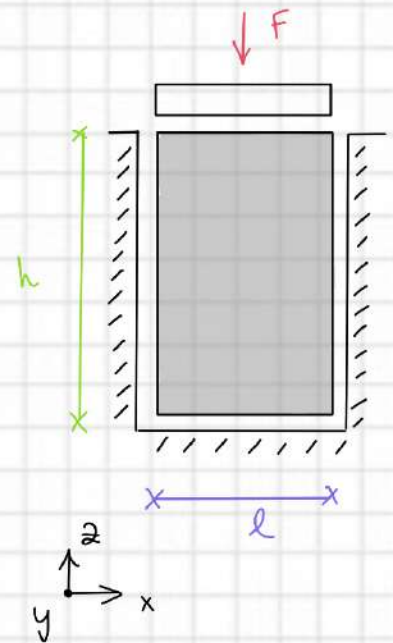
$l = 40 \text{ mm}$

$h = 60 \text{ mm}$

HP:

- non c'è attrito tra pareti e blocco
- F distribuita in modo uniforme sulla faccia del blocco

? Trovare il cambio di altezza quando il blocco viene compresso con una forza di 160 kN



Mi aspetto:

$$\varepsilon_z \neq 0$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$$

→ il blocco non può espandersi

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z \neq 0$$

→ se la deformazione è nulla non è detto che anche lo sforzo lo sia, anzi si genererà proprio dal fatto che il blocco non riesce ad espandersi

Non ho componenti di taglio (dato che non ho attrito tra blocco e parete)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \end{cases} \quad \begin{cases} \phi = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \phi = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \end{cases}$$

$$\left(\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \right)$$

$$\left(\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \right)$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \nu (\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\sigma_y = \nu \left[\nu (\sigma_y + \sigma_z) + \sigma_z \right] = \nu^2 \sigma_y + \nu^2 \sigma_z + \nu \sigma_z$$

$$\sigma_y (1 - \nu^2) = \sigma_z \nu (1 + \nu)$$

$$\sigma_y = \frac{\nu \sigma_z (1 + \nu)}{1 - \nu^2} = \frac{\nu \sigma_z (1 + \nu)}{(1 - \nu)(1 + \nu)} = \frac{\nu \sigma_z}{1 - \nu} = \sigma_x$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} 2 \left(\frac{\nu \sigma_z}{1 - \nu} \right) = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{2\nu^2}{E} \frac{\sigma_z}{1 - \nu}$$

$$\sigma_z = -\frac{F}{l^2} \rightarrow \text{compressione}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_z = -\frac{F}{l^2 E} + \frac{2 F \nu^2}{l^2 E (1 - \nu)} = -\frac{F}{l^2 E} \left(1 - \frac{2\nu^2}{1 - \nu} \right)$$

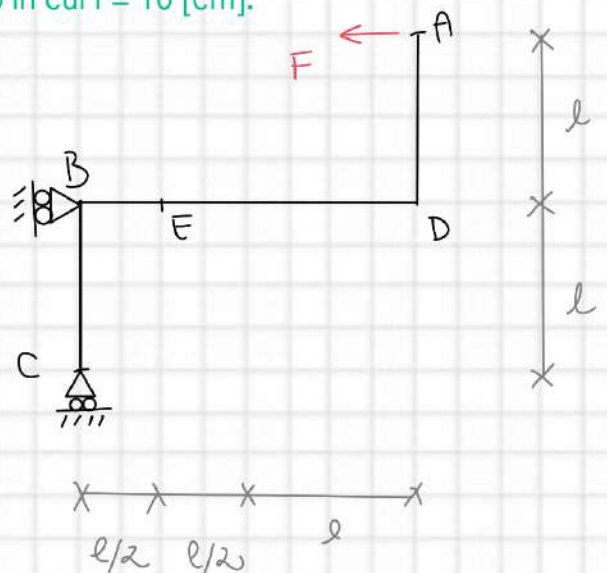
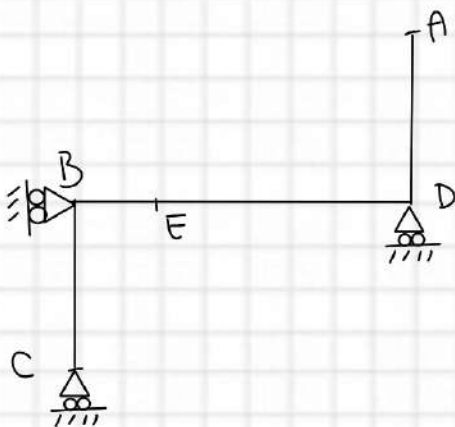
$$\varepsilon_z = \frac{\Delta h}{h} \Rightarrow \Delta h = -\frac{F}{l^2 E} \left(1 - \frac{2\nu^2}{1 - \nu} \right) h$$

Ritrovo il meno che è congruente con la compressione.

ES4: Appello straordinario - maggio 2021

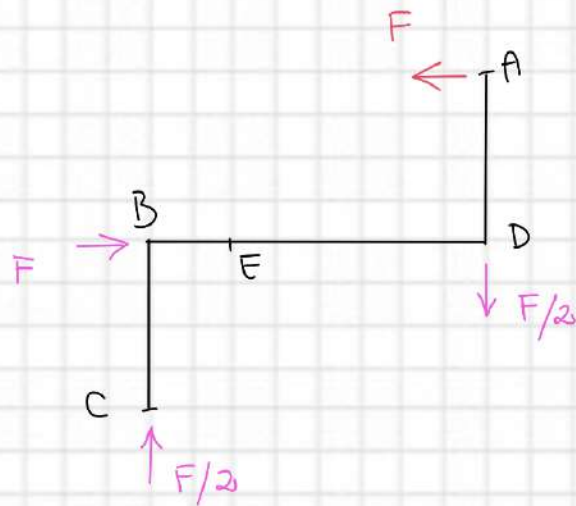
1. Aggiungere un carrello nell'estremo D nella struttura illustrata in figura (asta singola), al fine di renderla isostatica, dandone dimostrazione tramite analisi cinematica.
2. Svolgere poi l'analisi statica e diagrammare le caratteristiche di sollecitazione.
3. Trovare il valore di F [N] affinché $M(E) = 1 \text{ [Nm]}$ nel caso in cui $l = 10 \text{ [cm]}$.

1.

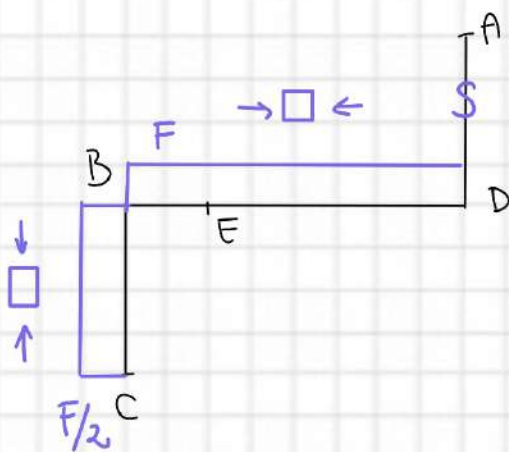


(dimostrazione ...)

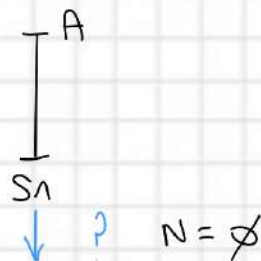
2. ANALISI STATICA (...)



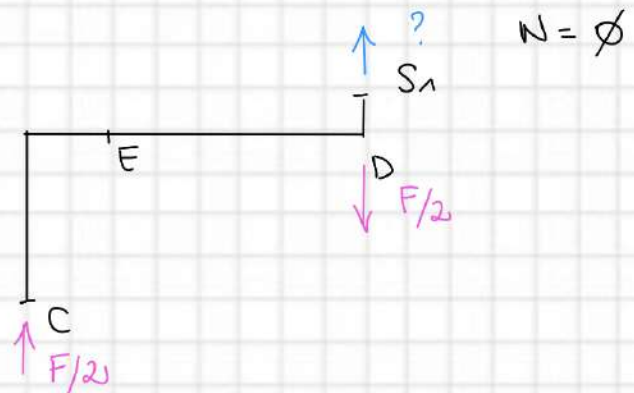
N)



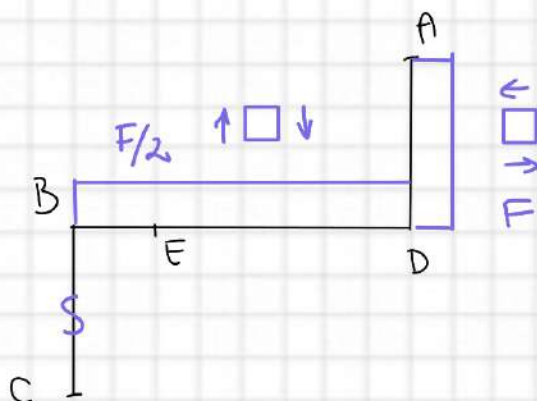
Considero il tratto A-S1



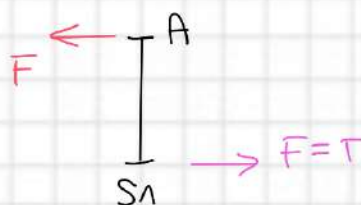
Non sono convinta, considero il tratto S1-C



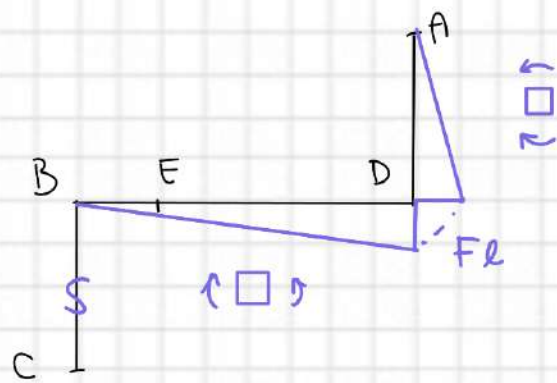
T)



Considero il tratto A-S1



M)



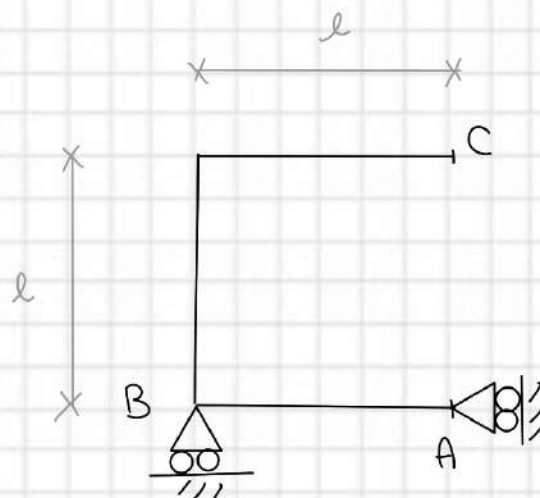
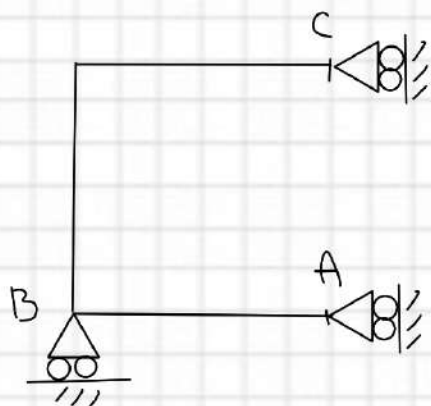
3. $M(E) = F \frac{\ell}{4}$

$\Rightarrow F = 40 \text{ N}$

SIMULAZIONE D'ESAME

ES1: Aggiungere un carrello alla struttura illustrata al fine di renderla isostatica, dimostrando l'efficacia dei vincoli tramite analisi cinematica, condotta con il metodo analitico.

I due carrelli presenti in figura sono equivalenti a un vincolo cerniera; devo aggiungere un carrello il cui asse non passa per la cerniera.

ANALISI CINEMATICA

Formula $[3t - s = l - i]$

$$3t - s = l - i$$

$$t = 1$$

$$s = 3$$

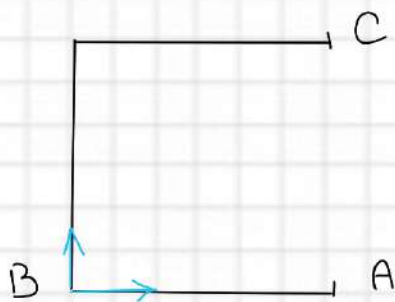
$$\rightarrow l - i = 0$$

→ situazione ambigua

Metodo analitico:

struttura senza vincoli

gdl u_B, v_B, φ_B



equazioni di vincolo

vincolo in A $u_A = 0$

vincolo in B $v_B = 0$

vincolo in C $u_C = 0$

equazioni in funzione dei gdl (polo B)

$$\begin{cases} u_A = u_B - (y_A - y_B) \varphi_B \\ N_B = 0 \\ u_C = u_B - (y_C - y_B) \varphi_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_B = 0 \\ N_B = 0 \\ u_B - l \varphi_B = 0 \end{cases}$$

sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B \\ N_B \\ \varphi_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

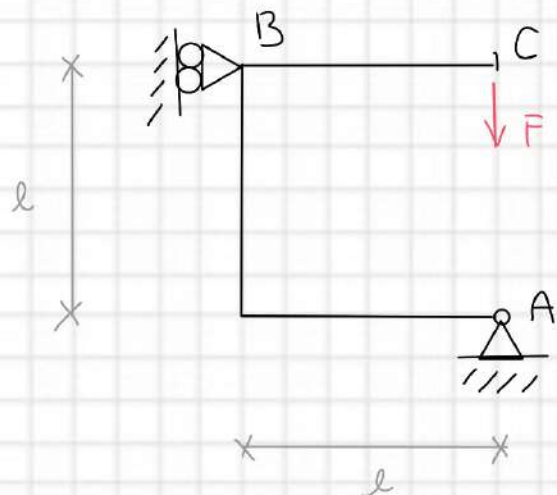
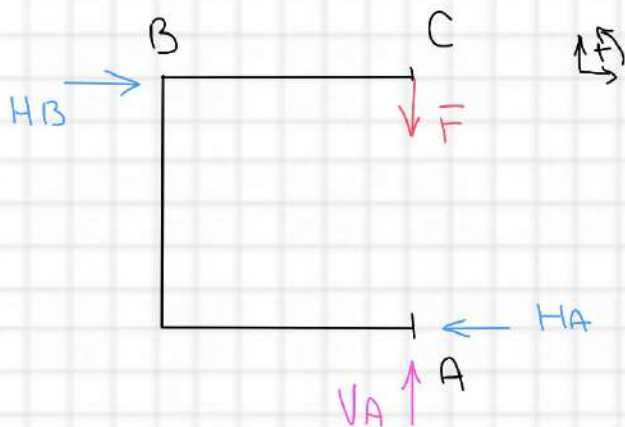
$$\det(A) = -l \neq 0$$

$$\Rightarrow l = \dim(A) - \text{rg}(A) = 0 \rightarrow \text{struttura isostatica}$$

ES2: Per la seguente struttura si esegua l'analisi statica; si traccino i diagrammi delle azioni interne.

ANALISI STATICA

reazioni vincolari



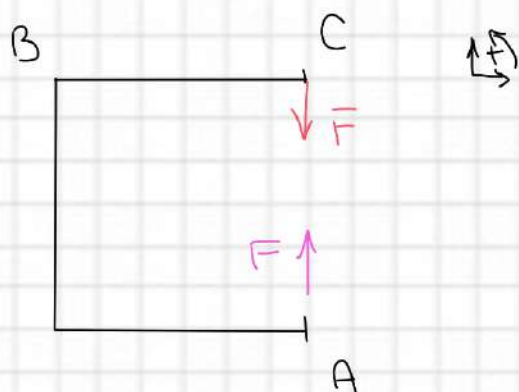
equazioni di equilibrio (polo A)

$$\begin{cases} H_B - H_A = 0 \\ V_A - F = 0 \\ -H_B l = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_B = H_A \\ V_A = F \\ H_B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = F \\ H_B = 0 \end{cases}$$

struttura con reazioni vincolari



verifica

$$\sum F_x = 0$$

ok!

$$\sum F_y = 0$$

$$-F + F$$

ok!

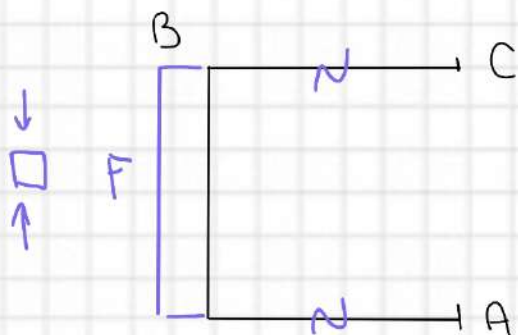
$$\sum M_B = 0$$

$$Fl - Fl$$

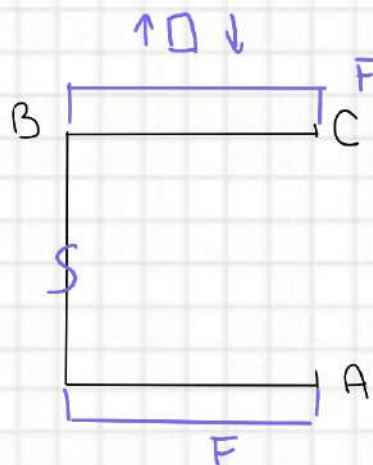
ok!

CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

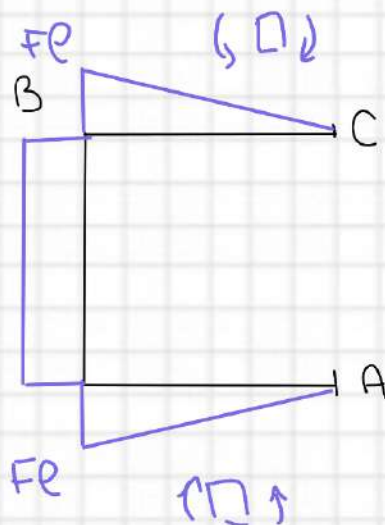
N)



T)



M)



ES3: Per la seguente struttura si esegua l'analisi cinematica e statica; si traccino i diagrammi delle azioni interne.

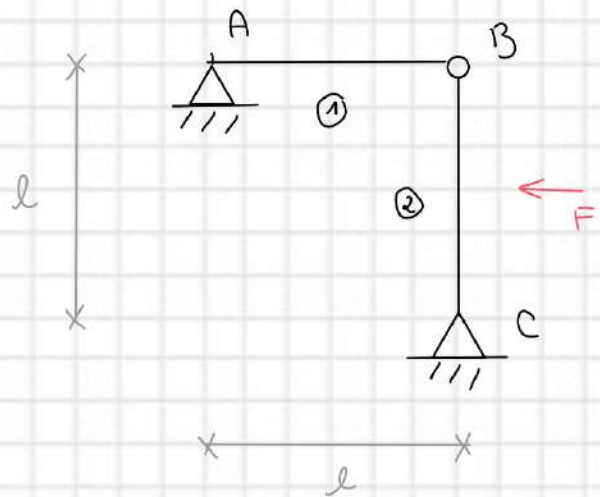
ANALISI CINEMATICA

Formula $[3t - s = l - i]$

$$t = 2$$

$$s = 6$$

$$\rightarrow l - i = 0$$



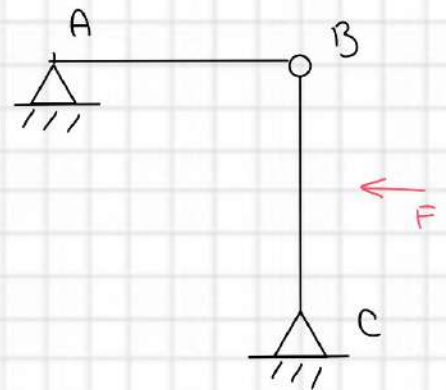
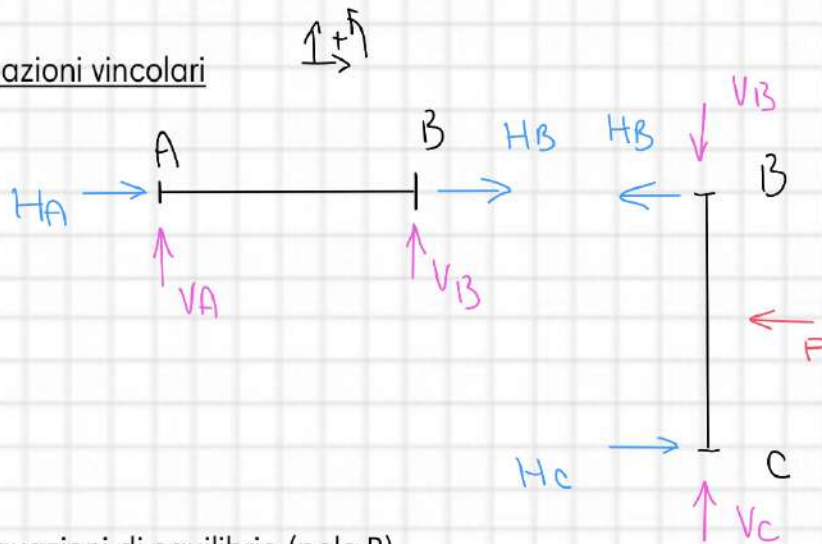
Metodo grafico [centri di rotazione]:

La struttura è un arco a tre cerniera con i centri di rotazione non allineati $\Rightarrow$ caso isostatico.

Inoltre, osservo che l'asta 1 è una biella, quindi equivale a un carretto con asse orizzontale in B.

ANALISI STATICA

reazioni vincolari



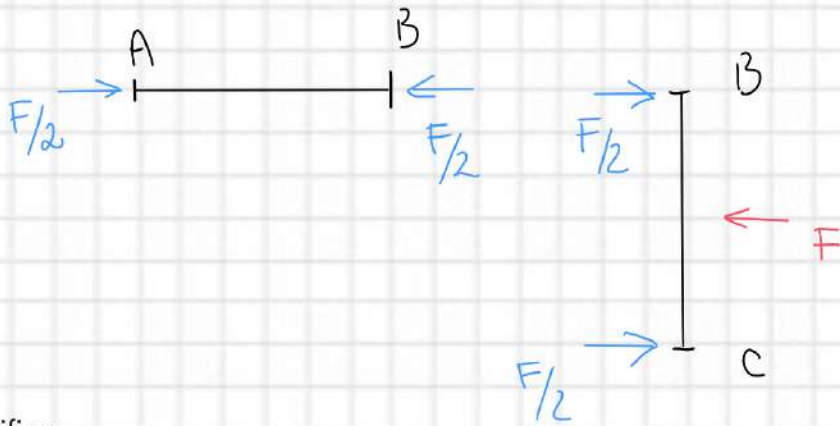
equazioni di equilibrio (polo B)

$$\left\{ \begin{array}{l} H_A + H_B = 0 \\ V_A + V_B = 0 \\ -V_A l = 0 \\ -H_B + H_C - F = 0 \\ V_C - V_B = 0 \\ -F \frac{l}{2} + H_C l = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_A = -H_B \\ V_A = -V_B \\ V_A = 0 \\ H_B = -\frac{F}{2} \\ V_C = V_B \\ H_C = \frac{F}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_A = \frac{F}{2} \\ V_B = 0 \\ V_A = 0 \\ H_B = -\frac{F}{2} \\ V_C = 0 \\ H_C = \frac{F}{2} \end{array} \right.$$

struttura con reazioni vincolari



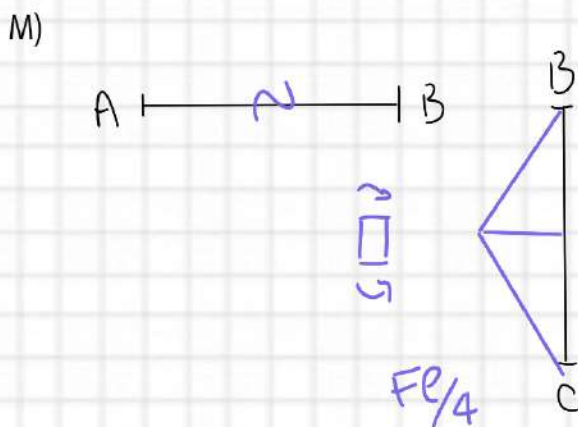
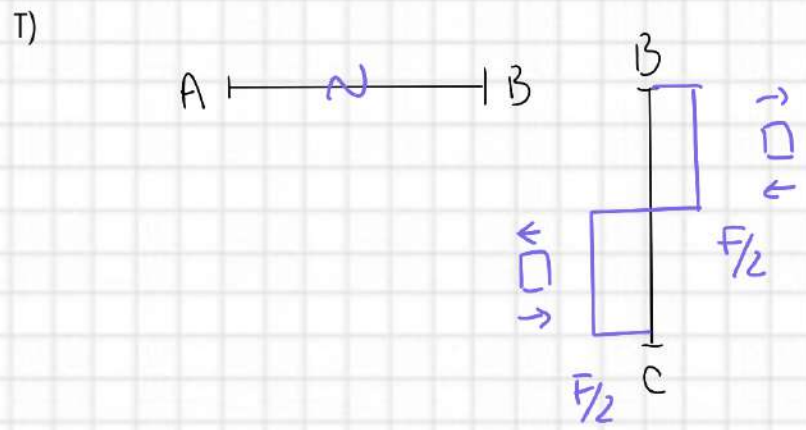
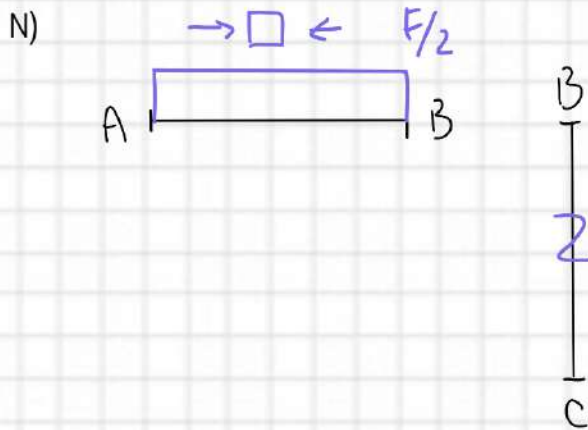
verifica

$$\sum F_x = 0 \quad \frac{F}{2} - \frac{F}{2} + \frac{F}{2} + \frac{F}{2} - F \quad \text{Ok!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \text{Ok!}$$

$$\sum M_A = 0 \quad -F \frac{l}{2} + \frac{F}{2} \cdot l \quad \text{Ok!}$$

CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE



ES4: Calcolare il modulo elastico della trave elastica in figura sapendo che l'abbassamento in mezzaria è pari a 6 mm, assumendo che:

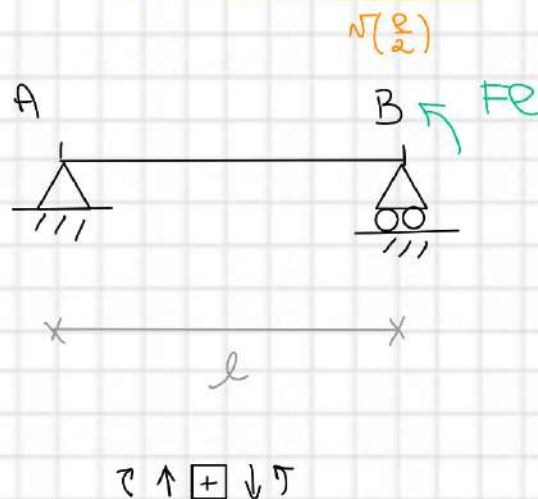
- $L = 1 \text{ m}$
- sezione quadrata di lato 10 cm
- $F = 800 \text{ N}$

EQUAZIONE INDEFINITA DELLA LINEA ELASTICA

$$EI v^{IV} = q(x) \rightarrow q(x) = 0$$

CARICO CONCENTRATO

$$\begin{cases} EI v^{IV} = 0 \\ EI v''' = C_1 \\ EI v'' = C_1 x + C_2 \\ EI v' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \\ EI v = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \end{cases}$$



CONDIZIONI AL BORDO

vincolo cerniera in $x = 0 \rightarrow v(0) = 0 \rightarrow C_4 = 0$ (5)

$M(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$ (3)

vincolo carrello in $x = l \rightarrow v(l) = 0 \rightarrow \frac{Fl^3}{6} + C_3 l = 0 \Rightarrow C_3 = -\frac{Fl^2}{6}$ (5)

$M(l) = Fl \rightarrow + Fl = C_1 l \Rightarrow C_1 = F$ (3)

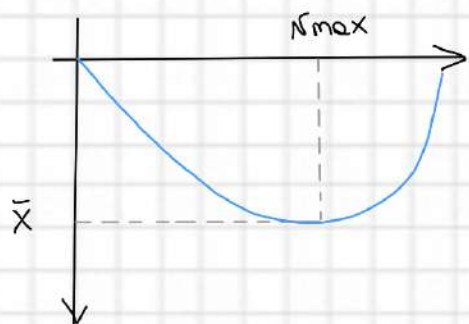
$$\Rightarrow v = \frac{1}{EI} \left(\frac{Fx^3}{6} - \frac{Fl^2 x}{6} \right)$$

$$v\left(\frac{l}{2}\right) = -6 \text{ mm} = -0,006 \text{ m} = -\tilde{v}$$

$$E = -\frac{1}{\tilde{v} I} \left(\frac{Fl^3}{48} - \frac{Fl^3}{24} \right)$$

$$= \frac{1}{\tilde{v} I} \frac{Fl^3}{24} = 666 \text{ MPa}$$

$$I = \frac{b^4}{12} = \frac{0,1^4}{12} \text{ m}^4 = \frac{1}{12} \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

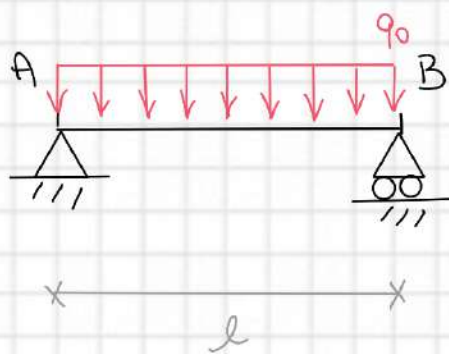
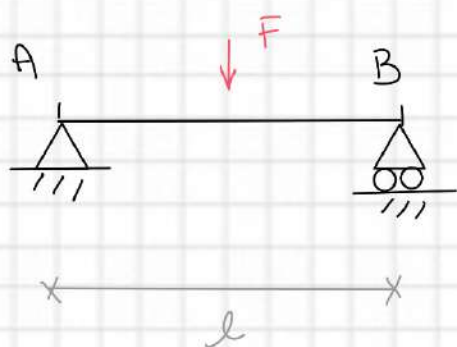


$$N_{\max} = N(\bar{x}) \rightarrow N'(\bar{x}) = 0$$

$$N' = \frac{1}{EI} \left(\frac{Fl^2}{2} - \frac{Fl^2}{6} \right) = 0$$

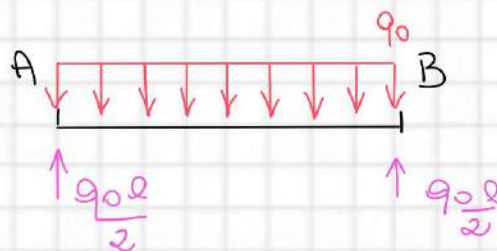
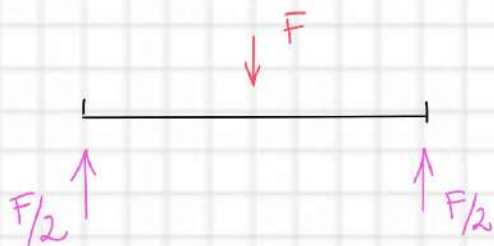
$$\bar{x}^2 = \frac{Fl^2}{6} \cdot \frac{2}{Fl^2} = \frac{l^2}{3} \rightarrow \bar{x} = \sqrt{\frac{l^2}{3}} = 0,5774 \text{ m}$$

ES5: Calcolare e diagrammare l'azione di taglio $T(x)$ e l'azione flettente $M(x)$ nei due casi illustrati in figura.



↑ ↑ ⊕ ↓ ↓

EQUILIBRIO



$$T'(x) = q(x)$$

$$T(x) = \int q(x) dx + C_1 = -q_0 x + C_1$$

$$q(x) = -q_0$$

$$T(0) = \frac{q_0 l}{2} \rightarrow C_1 = \frac{q_0 l}{2}$$

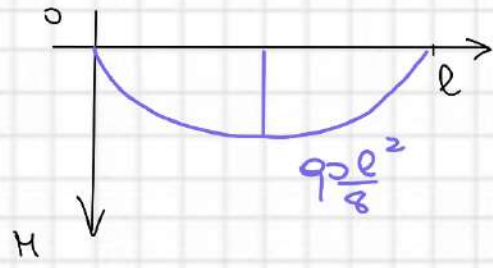
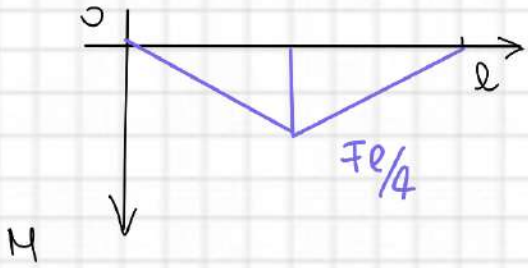
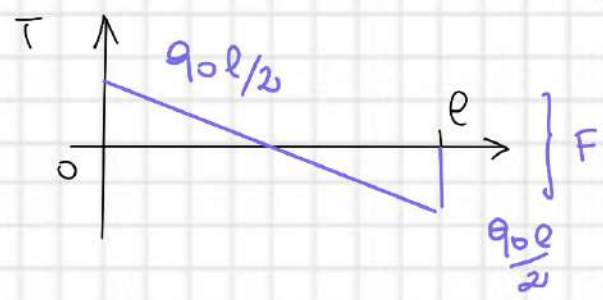
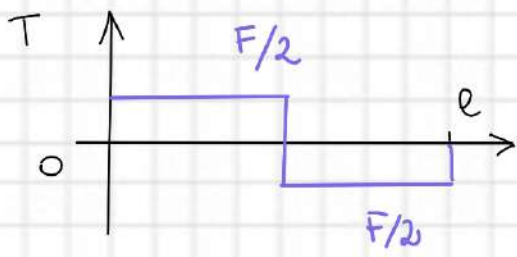
$$T(x) = -q_0 x + \frac{q_0 l}{2}$$

$$M(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + \frac{q_0 l}{2} x + \frac{C}{2}$$

$$M(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$M(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + \frac{q_0 l}{2} x$$

$$M(l) = -q_0 \frac{l^2}{2} + \frac{q_0 l}{2} l = 0$$

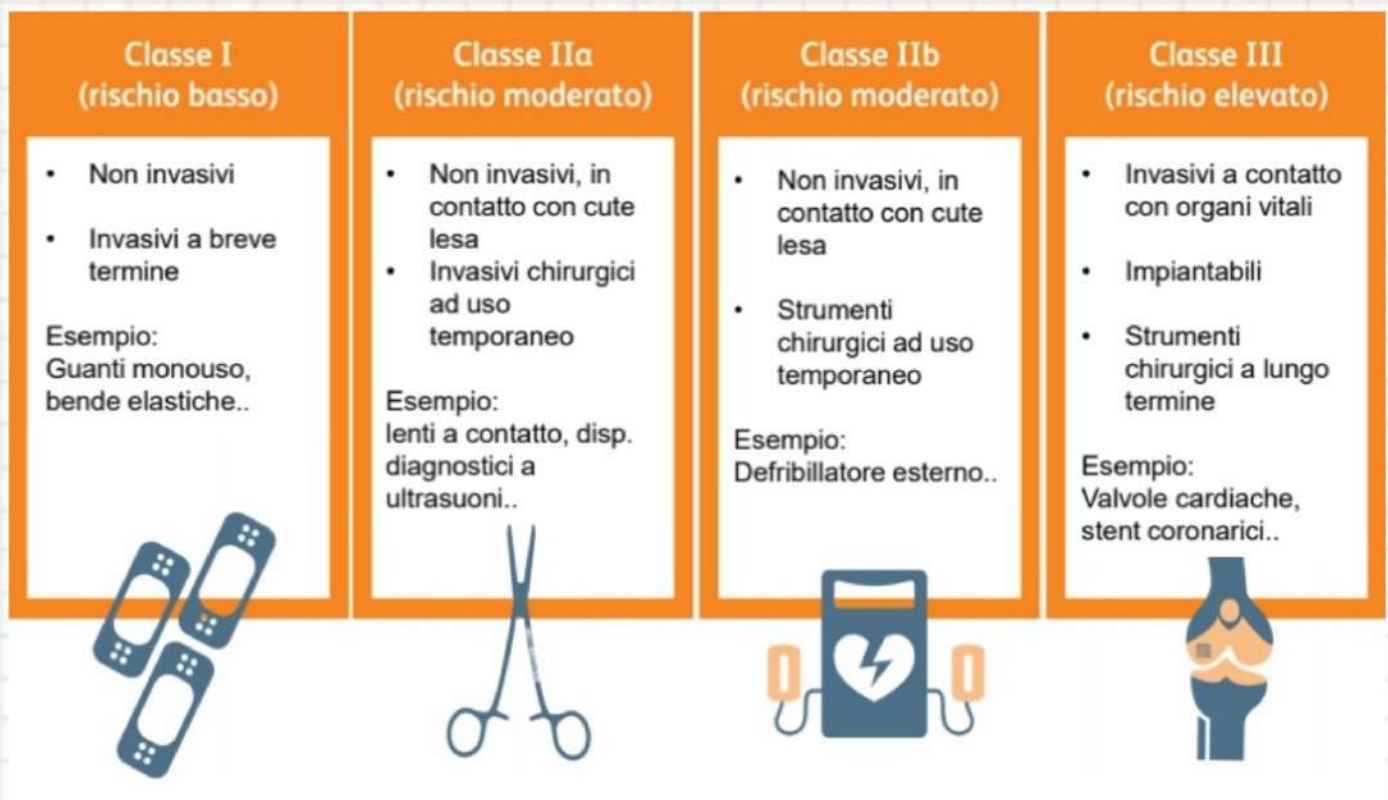


PROPRIETA' DEI TESSUTI

Lo studio degli aspetti funzionali dei materiali biologici è utile a fini:

- Diagnostici/predittivi: diagnosi partendo da un'alterazione delle proprietà meccaniche (metodo non invasivo).
- Terapeutici: conoscere il problema per intervenire da un punto di vista terapeutico.
- Sviluppo dei dispositivi medici per:
 - Strumentazione: interazione con tessuti biologici per un tempo limitato,
 - Protesi: interazione con tessuti per un tempo prolungato.
- Sviluppare modelli per:
 - Test di strumentazione: verificare la funzionalità di un nuovo strumento in fase di sviluppo su un modelli sintetico/numerico,
 - Simulazione e training: consentire al personale medico di testare e addestrarsi in sicurezza.

CLASSI DI RISCHIO



REQUISITI

- Strutturali: schematizzazione delle forze in gioco, studio della biomeccanica.
- Chimico-fisici: il materiale non deve alterare il tessuto biologico con cui è in contatto; si parla di biocompatibilità, il materiale:
 - non deve essere tossico,
 - non deve indurre una reazione nel tessuto,
 - avrà una durata prestabilita.

DEFINIZIONE DI BIOMATERIALE

Consensus Conference on the Clinical Application of Biomaterials, National Health Institute, Bethesda, USA, 1984

"Ogni sostanza o combinazione di sostanze, di origine sintetica o naturale diversa da un farmaco, che può essere impiegata per qualsiasi periodo di tempo, da sola o come parte di un sistema che tratta, aumenta o sostituisce un qualsiasi tessuto, organo o funzione del corpo."

→ ci si focalizza sulla composizione.

Società Europea dei Biomateriali, Chester, UK, 1986

"Una sostanza non vivente utilizzata nella fabbricazione di un dispositivo medico che ha in qualche punto un'interfaccia con un tessuto vivente."

Consensus Conference di Chester, UK, 1991

"Un materiale per il quale si prevede una interfaccia con sistemi biologici al fine di valutare, trattare, migliorare o sostituire qualsiasi tessuto, organo o funzione del corpo umano."

→ definito in relazione alla finalità di utilizzo.

Quest'ultima definizione è inserita nella Direttiva 93/42/CEE.

ES: polietilene ad altissimo peso molecolare

Polimero che può essere usato per produrre giubbotti antiproiettile o usato come inserto nelle protesi d'anca. È un biomateriale se considerato in quest'ultimo caso.

DISPOSITIVO MEDICO

È definito dispositivo medico uno strumento, un apparecchio, un impianto, una sostanza o altro prodotto usato da solo o in combinazione, compreso il software informatico impiegato per il corretto funzionamento, e destinato dal fabbricante ad essere impiegato nell'uomo a scopo di:

- diagnosi, prevenzione, controllo, terapia o attenuazione di una malattia,
- diagnosi, controllo, terapia, attenuazione o compensazione di una ferita o di un handicap,
- studio, sostituzione e modifica dell'anatomia o di un processo fisiologico,
- intervento sul concepimento, purché non eserciti l'azione principale nel o sul corpo umano, cui è destinato, con mezzi farmacologici o immunologici, né mediante processo metabolico, ma la cui funzione possa essere coadiuvata da tali mezzi.

BIOMATERIALE E TESSUTO BIOLOGICO

Il biomateriale e il tessuto biologico sono in continua interazione. Due concetti fondamentali sono:

- Biocompatibilità: caratteristica di stabilire interazioni "non sfavorevoli" con i sistemi viventi con i quali esso viene in contatto.
- Biofunzionalità: proprietà che un dispositivo deve avere per riprodurre una determinata funzione dal punto di vista fisico e meccanico.

BIOCOMPATIBILITA'

Requisito fondamentale, legato alla necessità di migliorare e/o ripristinare una determinata funzione biologica, senza interferire o interagire in modo dannoso con le attività fisiologiche dell'organismo.

La biocompatibilità dei dispositivi, e quindi quella dei loro componenti, deve essere acquisita con

certezza (testata e documentata) e poi approvata dagli organismi deputati (per esempio, FDA, marchio CE, etc.) prima della commercializzazione e dell'utilizzo in ambito clinico.

Non esiste una reazione sfavorevole o favorevole in assoluto → ogni materiale provoca una reazione nell'organismo e allo stesso tempo subisce una reazione dall'organismo.

Nessun materiale biologico è del tutto inerte. Le risposte dell'organismo dipendono da:

- tipologia di materiale,
- caratteristiche e localizzazione,
- stato fisiologico del ricevente.

La biocompatibilità va intesa solo in riferimento alla sua sicurezza biologica:

- è relativa anche alle caratteristiche chimico-fisiche e alle proprietà meccaniche del materiale,
- deve essere controllata durante l'intero ciclo produttivo, dalla fase di progettazione a quella di sterilizzazione, dall'approvvigionamento delle materie prime al confezionamento finale del prodotto.

CLASSIFICAZIONE

In base a:

- Effetti dell'organismo sul materiale:
 - Biostabili: una volta impiantati non subiscono sostanziali trasformazioni chimiche e/o fisiche nel tempo. **ES**: titanio, alluminio e zirconio, polietilene ad altissimo peso molecolare.
 - Biodegradabili: una volta impiantati subiscono sostanziali trasformazioni chimiche e/o fisiche che li portano a scomparire nel tempo. **ES**: acido lattico e acido glicolico.
- Effetti del materiale sull'organismo:
 - Biotossici: provocano una reazione di rigetto da parte del tessuto biologico. **ES**: leghe a base di nichel, cadmio, vanadio e altri elementi tossici, alcuni acciai al carbonio e metilmetacrilati.
 - Bioinerti: stabili dal punto di vista chimico-fisico e presentano interazioni minime con i tessuti circostanti. Consentono una buona coesistenza tra organismo e impianto. **ES**: ossidi di tantalio, titanio, alluminio e zirconio.
 - Bioattivi: favoriscono le interazioni dirette di tipo biochimico con il tessuto biologico, che può crescere sulla superficie del materiale stesso. Tutto ciò permette l'instaurarsi di un solido legame dal punto di vista meccanico tra tessuto naturale e impianto protesico. **ES**: alcuni materiali ceramici.
 - Biorassorbibili: subiscono una progressiva degradazione all'interno del sistema biologico, senza che questo provochi reazioni di rigetto o effetti tossici. **ES**: fosfati di calcio, idrossiapatite porosa, alcuni biovetri, capopolimeri acido lattico / acido glicolico.

Inoltre si suddividono in base alle generazioni:

- 1G) Materiali bioinerti usati per ripristinare le caratteristiche fisiche dei tessuti danneggiati, obiettivo: minimizzare la risposta immunitaria.
- 2G) Materiali bioattivi che interagiscono con l'ambiente biologico favorendo la risposta biologica e l'interazione impianto/tessuto, e materiali riassorbibili aventi la capacità di degradarsi mentre il tessuto si rigenera.
- 3G) Materiali sia bioattivi sia biorassorbibili usati come strutture porose tridimensionali temporanee in grado di stimolare la rigenerazione dei tessuti. **ES**: lo scaffold che è una

matrice 3D che si realizza con biomateriali che promuova la crescita del tessuto (bioattività) e si degrada nel tempo (bioriassorbibilità) per lasciare spazio alla crescita del tessuto.

- Natura chimica
 - metallici,
 - ceramici,
 - polimerici,
 - derivazione biologica,
 - compositi.

CATEGORIA	CARATTERISTICHE FAVOREVOLI	CARATTERISTICHE SFAVOREVOLI	PRINCIPALI SETTORI APPLICATIVI
metallici: acciaio, titanio e sue leghe, leghe di cobalto	elevate prestazioni meccaniche e resistenza all'usura	rigidità, alta densità, possibilità di corrosione con rilascio di ioni metallici tossici e conseguente scarsa biocompatibilità	protesi ortopediche; valvole cardiache; odontoiatria
ceramici: ossidi di alluminio, ossidi di titanio, carbonio pirolitico	inerzia chimica, resistenza all'usura per frizione meccanica, buona biocompatibilità	rigidità, fragilità, bassa resistenza a trazione, difficile lavorabilità	protesi ortopediche
polimerici: poliuretani, siliconi, poliesteri, polimeri fluorurati, PVC (cloruro di polivinile), polimeri acrilici, polietilene	flessibilità, estrema versatilità (polimeri fatti su misura), bassa densità, biodegradabilità programmabile, facile lavorabilità	prestazioni meccaniche e resistenza all'usura e alla degradazione chimica non adeguate per molte applicazioni a lungo termine	protesi cardiovascolari; suture; cateteri; cementi ossei; rilascio controllato di farmaci; componenti attivi di organi artificiali (dializzatori, ossigenatori); supporti per ingegneria tissutale
biologici: valvole cardiache porcine; polveri ossee, gelatine, acido ialuronico	biocompatibilità	rischio di trasmettere malattie, come l'encefalite spongiforme d'origine ovina o bovina; affidabilità scarsa sul lungo periodo; difficoltà di conservazione	protesi vascolari; valvole cardiache; sostituti del plasma; 'pelle artificiale'
compositi: es.: polimeri rinforzati con fibre o materiali inorganici	combinano le proprietà favorevoli tipiche di diverse categorie di materiali	difficile lavorabilità, spesso scarsa coesione fra le diverse parti	odontoiatria; protesi cardiache; protesi articolari

MATERIALI METALLICI

I materiali metallici presentano caratteristiche quali:

- Elevato modulo elastico (100-:-200 GPa) ed un elevata resistenza di snervamento (300-:- 1000 MPa) così da rendere possibile la costruzione di strutture in grado di sopportare carichi elevati senza grandi deformazioni elastiche né deformazioni plastiche permanenti.
- Buona duttilità: quando la sollecitazione applicata supera la resistenza di snervamento, la struttura si deforma plasticamente invece di rompersi in maniera fragile. Ciò permette di solito di intervenire sostituendo il componente deformato prima che si rompa.
- Elevata resistenza alla fatica meccanica, ciò che li rende indicati in tutte le applicazioni per le quali si prevedono cicli di carico.

I materiali metallici si prestano alla sostituzione di tessuti quali ossa e denti in forza delle loro elevate proprietà meccaniche che rendono possibile la realizzazione di protesi in grado di sopportare carichi. La biocompatibilità dei metalli è legata alla facilità o meno della loro corrosione in ambiente biologico: i fluidi biologici hanno infatti un elevato potere corrosivo nei confronti dei metalli.

Durante la corrosione avviene il rilascio di ioni metallici con due possibili conseguenze:

1. perdita di funzionalità dell'impianto, dovuta al peggioramento delle proprietà meccaniche,
2. contaminazione sia dei tessuti circostanti sia dell'intero organismo, con ioni metallici spesso tossici,

con danno anche grave per la salute del paziente.

ESEMPIO - TITANIO Ti6Al4V

Lega con il titanio: titanio, 6% ca di alluminio, 4% ca di vanadio.

E' un materiale:

- biostabile,
- bioinerte.

Il titanio è un elemento metallico che è ben conosciuto per la sua resistenza alla corrosione e per il suo alto rapporto resistenza/peso.

È leggero, duro, con una bassa densità e, allo stato puro si presenta abbastanza duttile, lucido e di colore bianco metallico.

Le leghe di titanio non sono facilmente lavorabili

Il titanio e le sue leghe devono la loro eccellente resistenza alla corrosione alla formazione di un film di biossido di Ti superficiale, particolarmente duro e resistente ad attacchi chimici.

Il maggior problema, da un punto di vista della corrosione, che Ti e leghe possono dare in impiantologia è la fretting corrosion (corrosione dovuta allo sfregamento) .

Il titanio è resistente come l'acciaio ma il 45% più leggero, pesa il 60% in più dell'alluminio ma con una resistenza doppia. Queste proprietà lo rendono molto resistente alle forme usuali di fatica dei metalli.



ESEMPIO - CARBONIO PIROLITICO

E' un materiale:

- biostabile,
- bioinerte,
- ceramico.

La struttura è composta da microcristalli grafitici disordinati intervallati da molecole libere di carbonio.

Viene utilizzato per il rivestimento di valvole vascolari per la sua ottima emocompatibilità → non crea trombi.



ESEMPIO - POLIETILENE AD ALTISSIMO PESO MOLECOLARE

E' un materiale:

- biostabile,
- bioinerte,
- polimerico.

Utilizzato come inserto polimerico tra due componenti metalliche nelle protesi articolari.



INVASIVITA' DELLE MISURE

- Misura diretta: ottengo il valore numerico della grandezza fisica di interesse tramite il confronto con l'unità di misura o tramite l'uso di sistemi tarati. **ES**: prova di trazione.
- Misura indiretta: ottengo il valore numerico della grandezza fisica utilizzando relazioni analitiche note che legano la grandezza fisica che si vuole determinare ad altre grandezze fisiche, su cui effettuo una misura diretta. **ES**: analisi della densità tessuto osseo attraverso le gradazioni di grigio della radiografia.

TESSUTO OSSEO

Il tessuto osseo si divide in:

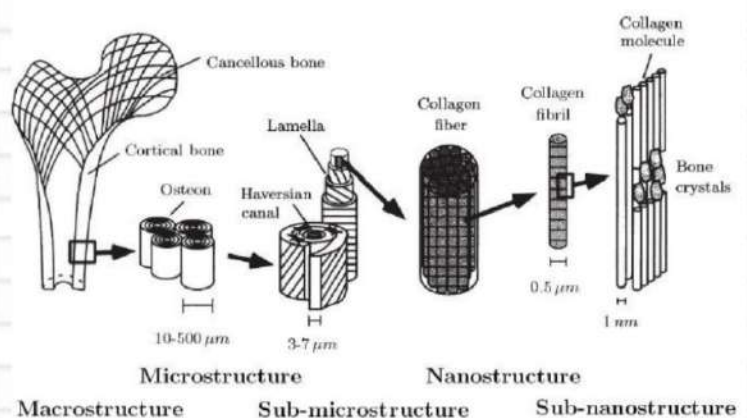
- Parte organica (30% del peso, 40% del volume): conferisce al tessuto resistenza alla trazione e alla compressione; è composto da:
 - cellule osteoprogenitrici,
 - cellule osteoblasti,
 - cellule osteociti,
 - cellule osteoclasti,
 - sostanza amorfa,
 - fibre di collagene di tipo I.
- Parte inorganica (60% del peso, 35% del volume): conferisce al tessuto durezza e rigidità; è composta da:
 - fosfati di calcio, magnesio
 - carboidrati
 - cristalli di idrossiapatite
- Parte di acqua (10% del peso, 25% del volume)

Inoltre, può essere:

- Non lamellare: le fibre di collagene sono raccolte in grossi fasci paralleli o intrecciati; è presente nei feti e nell'adulto ogni volta che c'è necessità di generare nuovo osso (frattura).
- Lamellare: fibre, cellule e matrice extracellulare sono raccolte in lamelle, è molto duro ed è attraversato da numerosi vasi sanguigni e dotti linfatici.

CLASSIFICAZIONE

1. macrostruttura: osso spongioso e corticale;
2. microstruttura (da 10 a 500 μm): sistemi di Havers (osteoni), osso lamellare, osso fibrolamellare, osso woven, singola trabecola ;
3. sub-microstruttura (1-10 μm): lamelle;
4. nanostruttura (100 nm a 1 μm): collagene fibrillare e minerali incorporati;
5. sub-nanostruttura (< 100 nm): struttura molecolare degli elementi costituenti come i cristalli minerali, fibrille di collagene e proteine organiche non collageniche.

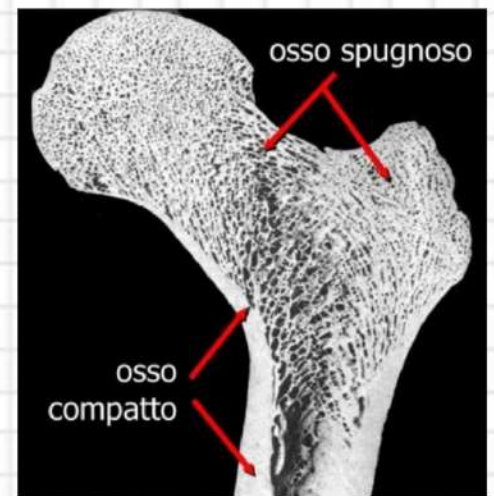


A noi interessa la prima classificazione.

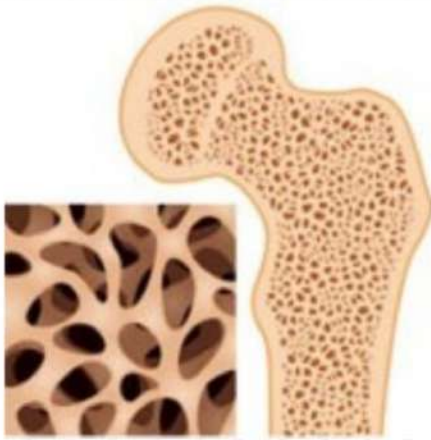
Il tessuto lamellare può essere:

- Compatto:
 - molto duro,
 - attraversato da numerosi canali (vasi sanguigni e dotti linfatici),

- porosità $P < 30\%$,
- frazione di volume $(1 - P) V_f < 70\%$,
- nella radiografia è molto bianco
- Spugnoso (trabecolare): reticolo 3D di trabecole ossee,
 - $P > 30\%$,
 - $V_f > 70\%$,
 - nella radiografia è nero.



OSTEOPOROSI



Osso sano

- Normale distribuzione tra osso corticale e trabecolare.
- Contenuto minerale nella norma.



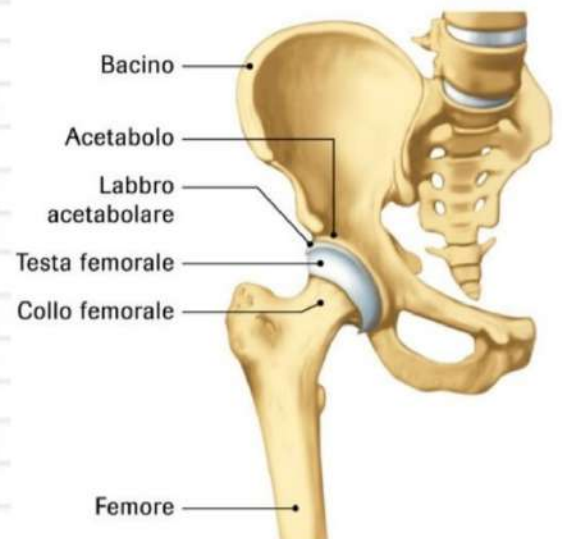
Osso osteoporotico

- Patologia caratterizzata da una riduzione di sali calcio nell'osso.
- Deterioramento delle ossa della massa e difetti nella microarchitettura del tessuto.

PROTESI D'ANCA

L'articolazione dell'anca è completamente sostituita da un'articolazione artificiale. Accade quando si deteriora l'articolazione o quando non si riesce ad eseguire un fissaggio.

E' una zona molto caricata → sorregge tutto il peso del corpo. E' una delle procedure chirurgiche più diffuse, si esegue in poche ore e il ricovero di pochi giorni. Inoltre, la riabilitazione è veloce per soggetti sani, inizia già il giorno seguente all'intervento.



COMPOSIZIONE



Uno dei materiali utilizzati per la protesi è la lega Ti6Al4V. Viene misurata:

- tensione,
 - compressione,
 - flessione,
 - indentazione,
 - ultrasuoni
- $\nu = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$



	Young's modulus (GPa)	Tensile strength (MPa)	Yield strength (Mpa)	Elongation at break (%)
Ti6Al4V	115	860	795	10-15

	Young's modulus (GPa)	Tensile strength (MPa)	Compressive strength (Mpa)	Compressive modulus (Gpa)
Osso compatto	7 - 30	50 - 150	130 -200	11.5 -17
Osso spugnoso	0.05 – 0.5	10 - 20	0.1 - 16	0.12 -1.1

Il modulo di Young della lega in titanio è molto diverso da quello dell'osso!

OSSO COMPATTO - PROPRIETA' MECCANICHE

Longitudinal direction	
Elastic modulus (MPa)	17,900 ± 3,900 ^b 18,160 ± 1,880 ^c
Poisson's ratio	0.62 ± 0.26 ^b
Tensile yield stress (MPa)	71.56 ± 10.19 ^{c, f}
Tensile yield strain (%)	0.67 ± 0.04 ^{c, f}
Tensile ultimate stress (MPa)	135 ± 15.6 ^b 92.95 ± 10.07 ^c
Tensile ultimate strain (%)	1.9 ± 0.6 ^c
Compressive yield stress (MPa)	115.06 ± 16.36 ^{c, f}
Compressive yield strain (%)	0.98 ± 0.09 ^{c, f}
Compressive ultimate stress (MPa)	205 ± 17.3 ^b 153.59 ± 21.63 ^c
Compressive ultimate strain (%)	1.3 ± 0.3 ^c
Shear modulus (MPa)	3,300 ± 400 ^c 6,070 ± 570 ^c
Shear yield stress (MPa)	40.95 ± 5.16 ^{c, f}
Shear yield strain (%)	0.87 ± 0.04 ^{c, f}
Shear ultimate stress (MPa)	65 ± 4.0 ^b 46.31 ± 5.82 ^c

REFERIMENTO
A STUDIO

Transverse direction	
Elastic modulus (MPa)	10,100 ± 2,400 ^b 5,650 ± 1,610 ^d 6,490 ± 3,220 ^e
Poisson's ratio	0.62 ± 0.26 ^b
Tensile ultimate stress (MPa)	53 ± 10.7 ^b
Compressive yield stress (MPa)	41.8 ± 19.4 ^d 44.1 ± 21.1 ^e
Compressive yield strain (%)	0.83 ± 0.42 ^d 0.84 ± 0.23 ^e
Compressive ultimate stress (MPa)	131 ± 20.7 ^b 65.2 ± 13.8 ^d 63.1 ± 20.7 ^e

OSSO SPUGNOSO - ANALISI ISTOMORFOMETRICA

Viene effettuata su sezioni istologiche bidimensionali e permette di ottenere una serie di parametri che descrivono la rete tridimensionale della struttura dell'osso.

I parametri principali sono i seguenti:

- **Total Volume** (mm³): intero volume della porzione di tessuto osseo comprensivo di trabecole e di spazi vuoti;
- **Bone Volume** (mm³): parte di volume occupata dalla sola componente ossea;
- **Volume fraction** (%): percentuale del rapporto tra il volume occupato dall'osso trabecolare e il volume totale del campione.

PROBLEMI

L'osso si adatta al carico a cui è sottoposto per migliorare la propria resistenza alla fatica:

- se il carico diminuisce, la densità ossea diminuisce;
- se il carico aumenta, la densità dell'osso aumenta.

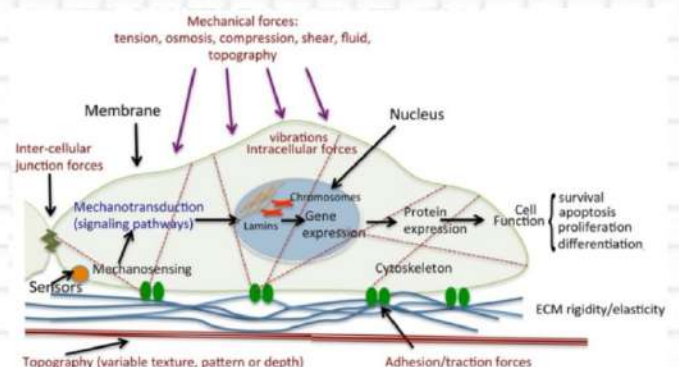
Il fenomeno avviene sia a livello di osso corticale sia trabecolare; il fenomeno che lo guida è la meccano-trasduzione.

La densità ossea e l'orientamento delle trabecolature sono il risultato di un processo di ottimizzazione topologica la quale è basata sul principio della meccano-trasduzione.

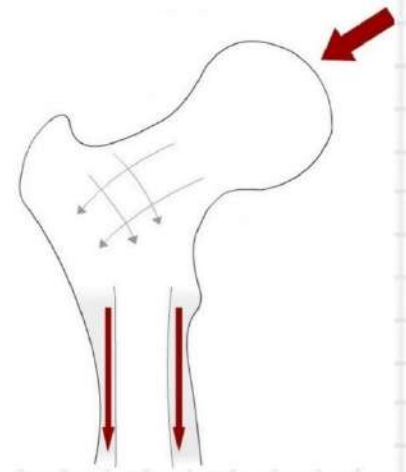
FENOMENO DI MECCANO-TRASDUZIONE

Processo che converte lo stimolo meccanico in attività elettrochimica che guida la crescita/decrecita ossea.

Le forze possono essere trasmesse al nucleo del citoscheletro e possono modificare i livelli di osteogenesi e di assorbimento osseo.



In condizioni di carico normale su un osso sano il carico viene trasmesso dall'osso trabecolare a quello corticale.



Quando viene posizionata la protesi d'anca, la trasmissione del carico viene alterata in modo significativo

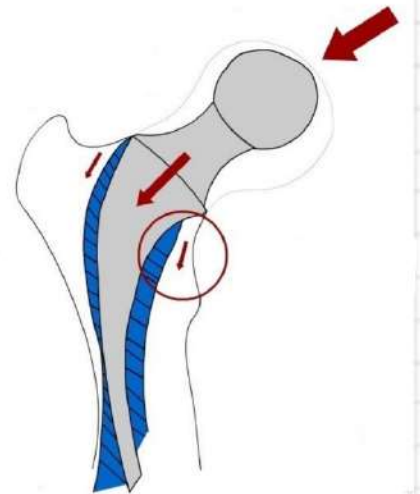
$$P_{\text{protesi}} > P_{\text{bone}}$$

$$E_{\text{protesi}} > E_{\text{bone}}$$

Il carico è applicato alla testa del femore ed è trasmesso attraverso lo stelo della protesi dato che la densità è più alta.

Avviene il fenomeno di stress shielding → l'osso corticale è scaricato dal peso e tende a riassorbirsi; questo può causare la rottura dell'osso.

Una soluzione può essere cercare di alleggerire la protesi in alcuni punti (sono note le zone di frattura).



IMAGING

In bianco e nero:

I parametri sono:

- # di pixel,
- # di valori: dipende dal numero di bit; se ad esempio si scelgono 8 bit, un pixel può assumere $2^8 = 256$ valori.

A colori:

I parametri sono:

- # di pixel,
- # di valori: dipende dal numero di bit; se ad esempio si scelgono 24 bit (8 per R, G e B), un pixel può assumere $2^{24} = 16,7$ milioni di valori.

Nelle immagini mediche cambia il significato dell'informazione che sta dentro una casellina (pixel):

- nella CT o radiografia si guarda l'intensità dell'assorbimento del raggio x,
- nella risonanza magnetica si guarda l'ampiezza di segnale di radiofrequenza.

Per quanto riguarda la protesi d'anca si fa una radiografia.

La CT è una tecnica non invasiva che scatta numerose fotografie a diversi livelli del corpo; tale contenuto è detto volumetrico dato che permette di ricostruire un oggetto 3D.

La tecnica tomografica a raggi X si fonda sulla legge di assorbimento, che descrive il fenomeno di attenuazione del fascio di raggi X che viaggia attraverso il campione:

$$I(y) = I_0 e^{-\mu y}$$

$I(y)$: intensità della radiazione emergente dal campione,

I_0 : intensità iniziale del raggio,

μ : coefficiente di attenuazione di massa,

y : cammino percorso nel mezzo.

In realtà μ non è costante ma varia lungo y , pertanto l'intensità della radiazione emergente sarà:

$$I(y) = I_0 e^{-\int_0^y \mu dy}$$

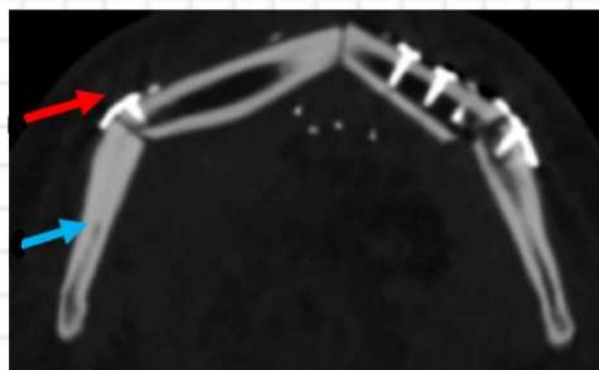
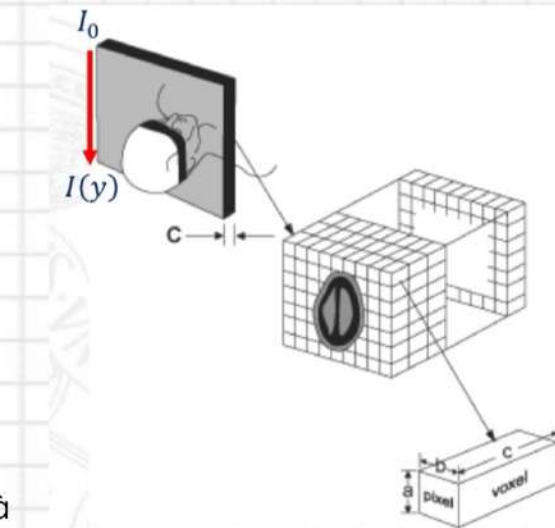
Il risultato ottenuto è detto integrale di linea e rappresenta l'attenuazione accumulata da raggi X mentre viaggiano lungo quella linea.

MDCT (Multi Detector Computed Tomography)

In ogni pixel di ogni slice sono contenute informazioni sull'attenuazione o assorbimento della radiazione.

Si tratta di strutture di densità diversa che hanno coefficiente di attenuazione μ diverso. Hanno una differente radiodensità;

Ad esempio, le placche di titanio hanno una radiodensità (o radio-opacità) molto maggiore dell'osso $\Rightarrow$ le placche schermano maggiormente radiazione e appaiono più chiare nelle immagini.



SCALA HOUNSFIELD

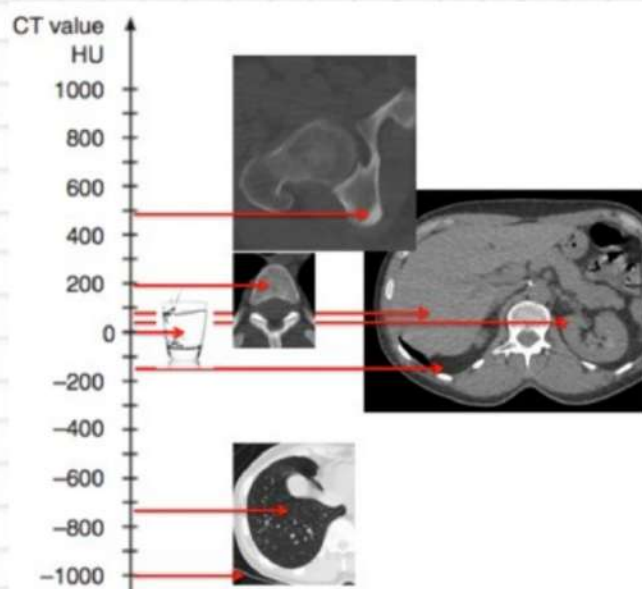
La scala Hounsfield quantifica la radiodensità dei materiali. Utilizza come riferimento la radiodensità di aria e acqua, misurate in condizioni standard di temperatura e pressione (es. 20°C, 1 atm con una radiazione incidente pari a 73 KeV).

All'aria è assegnato per definizione valore -1000 HU.

All'acqua è assegnato per definizione valore 0 HU.

La conversione del coefficiente di assorbimento (μ) di un materiale in HU avviene come:

$$HU = 1000 \times \frac{\mu - \mu_{H_2O}}{\mu_{AIR} - \mu_{H_2O}}$$



QTC (Quantitative Computed Tomography)

Dalla scala Hounsfield si passa a valori di densità minerale dell'osso attraverso la QTC.

La scansione è analoga alla CT + campioni di calibrazione. Contengono sostanze in grado di mimare l'assorbimento di radiazione da parte diverse di densità minerali di osso.

Valori tipici dell'osso:

Corticale (2500 / 3000 HU):

- ha un contenuto minerale nettamente superiore,
- più denso e compatto (più radiopaco),
- più chiaro nelle immagini CT.

Spugnoso (600 / 700 HU):

- ha un contenuto minerale inferiore
- più spugnoso e leggero (meno radiopaco)
- più scuro delle immagini CT



Come capire se l'osso è idoneo all'intervento o che tipologia di protesi sia la più indicata?

L'indagine QCT ci da un modello 3D → ottengo informazioni morfologiche dell'area di interesse.

Inoltre, fornisce una mappatura delle proprietà meccaniche → ottengo informazioni funzionali che posso utilizzare per obiettivi di simulazione, design etc.

SEGMENTAZIONE DELL'IMMAGINE

Tecnica usata per estrarre la regione che mi interessa → lavora sui valori di grigio per descrivere la struttura di interesse.

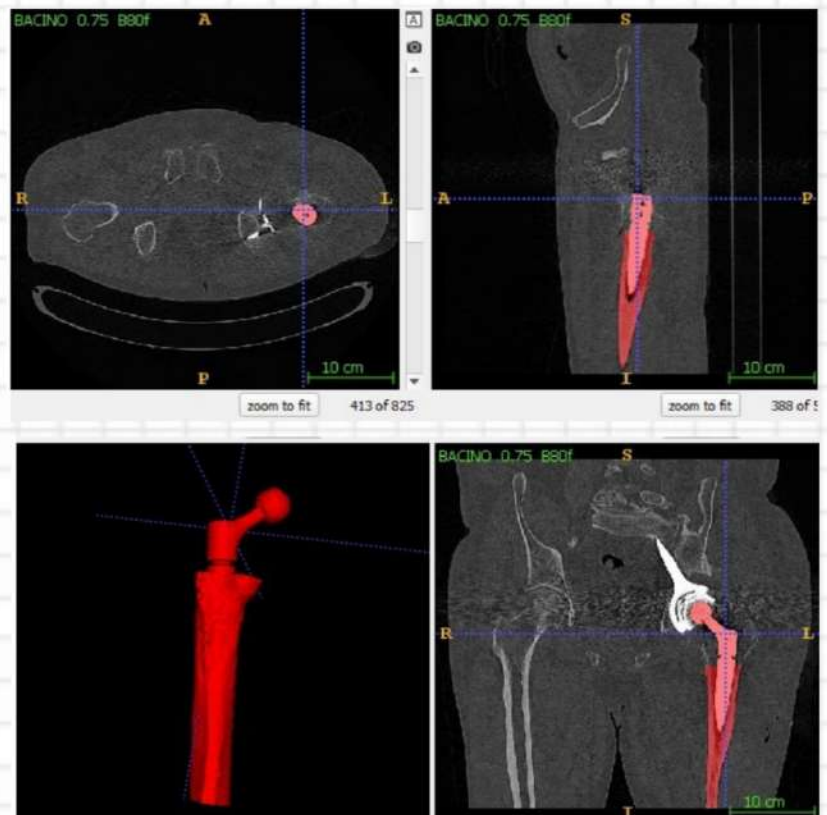
Sovrainposta alla immagine CT c'è un'altra immagine che vale:

- 0 dove non mi interessa prendere l'immagine,
- 1 dove mi interessa "ritagliare" l'immagine fino ad ottenere un modello 3D.

Tale modello può essere esportato in vari formati che consento di svincolarsi dalla CT.

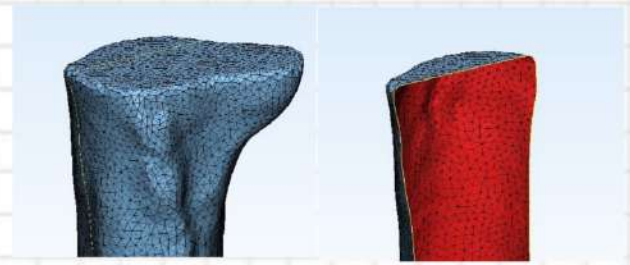
Tali formati sono detti mesh; ne esistono di due tipi:

1. di superficie
2. di volume



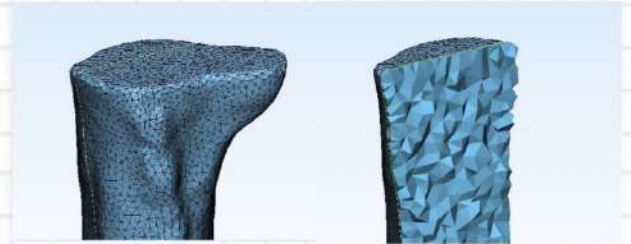
SURFACE MESH

Descrive solo la superficie; viene codificata con una serie di triangoli orientati. Ogni triangolo è descritto dalle coordinate (x,y,z) dei tre vertici e da una normale che dice qual è la superficie interna e quella esterna (informazione ridondante). La mesh può essere salvata in tanti formati la più comune è .stl (standard triangulation language).



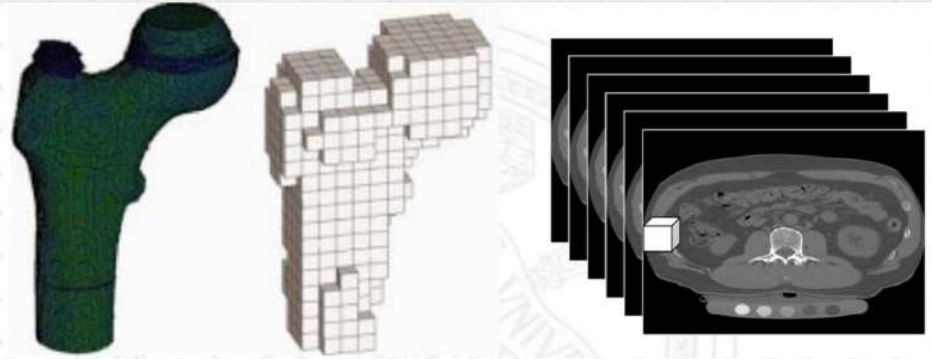
VOLUME MESH

La mesh di volume contiene informazioni sui vertici di una struttura 3D (cubo o tetraedro) e le normali a ciascuna faccia. Si ottiene così una immagine 3D.



Puntualmente si ottengono informazioni Hounsfield che è possibile convertire in informazioni meccaniche.

Il software BoneMat consente di effettuare la mappatura delle proprietà meccaniche.



COME CALCOLARE LA DENSITA' CORRISPONDENTE A 1 HU?

Utilizzando i campioni di calibrazione conosco:

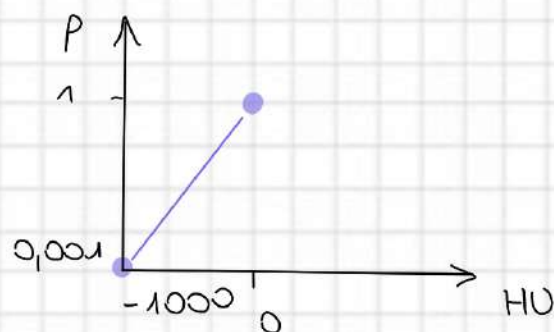
- la densità effettiva del materiale ρ_{eff} ,
- il suo valore HU $\rightarrow$ valore di grigio della CT.

La relazione è lineare $\rightarrow$ più è bianco, più è denso.

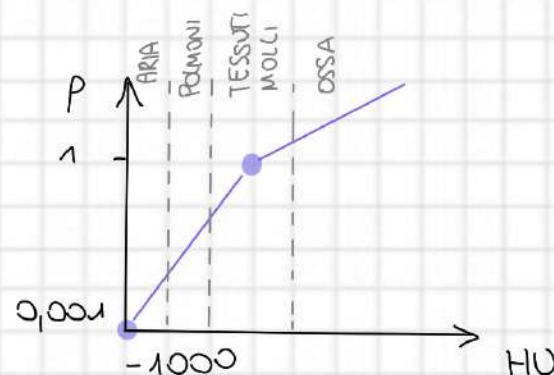
Attraverso una regressione lineare, posso ottenere i parametri della curva densità/HU come:

$$\rho_{\text{eff}} = a + b \text{ HU}$$

Passando da valori di grigio a Hunsfield abbiamo almeno due riferimenti: aria e acqua; così costruiamo la retta passante per i due punti.

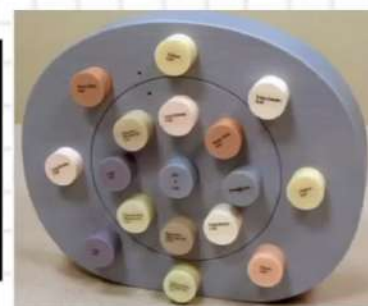
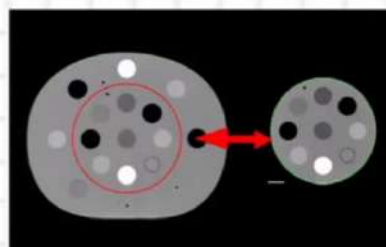


In realtà non basta una retta ma conviene dividere in segmenti, suddivisi per range di densità, ciascuno descrivibili con una relazione lineare.



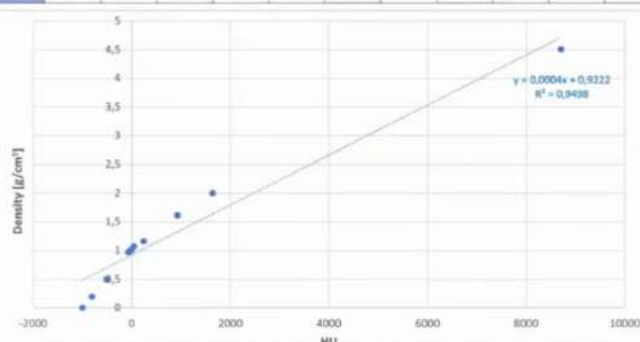
I phantom di calibrazione evidenziano tali differenze tra i tessuti. Ogni blocco ha densità nota pari a quella di un tessuto di riferimento.

- esterno: dimensione addome,
- interno: dimensione testa.

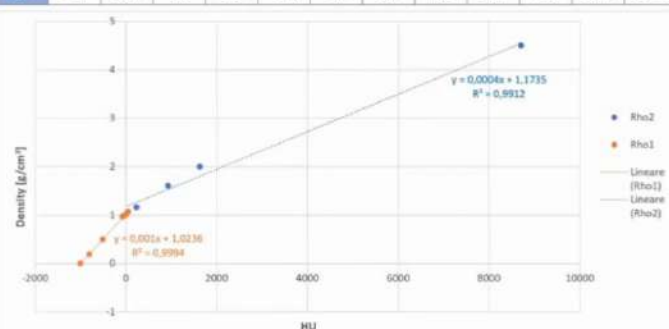


Una sola retta non può descrivere correttamente il complessivo andamento di tutti i tessuti.

Material	Air	Lung 1	Lung 2	Adipose	Breast	Water	Muscle	Liver	Bone 1	Bone 2	Bone 3	Titanium
Density (g/cm ³)	0	0,195	0,495	0,967	0,991	1,000	1,062	1,071	1,161	1,609	2,000	4,507
HU	-1000	-806,7	-509	-73,3	-34,8	-6,5	37,7	48,3	238,9	930,9	1636,2	8702,8



Material	Air	Lung 1	Lung 2	Adipose	Breast	Water	Muscle	Liver	Bone 1	Bone 2	Bone 3	Titanium
Density (g/cm ³)	0	0,195	0,495	0,967	0,991	1,000	1,062	1,071	1,161	1,609	2,000	4,507
HU	-1000	-806,7	-509	-73,3	-34,8	-6,5	37,7	48,3	238,9	930,9	1636,2	8702,8



L'intensità della radiazione emergente può essere calcolata come:

$$I(y) = I_0 e^{-\int_0^y \mu dy}$$

Il risultato ottenuto è detto integrale di linea e rappresenta l'attenuazione accumulata da raggi X mentre viaggiano lungo quella linea.

E' importante sottolineare che si ha:

- dipendenza dall'intensità iniziale del raggio,
- dipendenza dalle dimensioni della struttura → componente geometrica.

Ora che siamo passati dal valore HU al corrispettivo valore della densità possiamo dire che il valore di densità spesso non è sufficiente per valutare l'interazione osso-protesi.

Si deve quindi passare al modulo elastico.

COME CALCOLARE IL MODULO ELASTICO CORRISPONDENTE ALLA DENSITA'?

La relazione è tabulata per i vari tipi di osso secondo due modalità:

- relazione lineare: performante solo su osso $E_{lin} = a + b \cdot \rho_{QCT}$
- relazione esponenziale: più performante quando è presente anche una protesi

$$E_{exp} = a + \rho_{QCT}^b$$

Un fattore determinante per la scelta dell'una o dell'altra è l'essere in presenza o meno di una CT di impianti quindi di materiali con una densità molto maggiore di quello delle ossa. Nel caso in cui ci fosse un impianto è meglio usare la relazione esponenziale dato che lo scarto è molto maggiore tra la densità della protesi e quella del più denso tessuto presente nel corpo.

Relazione di Carter-Hayes → prima relazione inventata

$$E_{CH} = 3790 \rho_{QCT}^3 \left(\frac{d\epsilon}{dt} \right)^{0,06}$$

STRAIN RATE

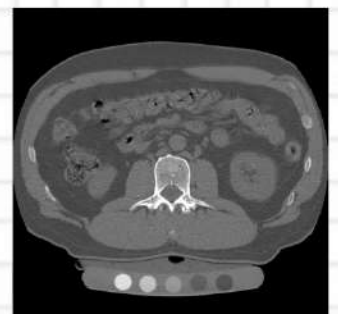
SE NON HO A DISPOSIZIONE UNA QTC?

Posso identificare sulle immagini delle regioni di riferimento riconoscibili e assegnare a ciascuna una label di segmentazione.

ES:

- label 1: osso corticale,
- label 2: osso trabecolare,
- label 3: protesi.

Si calcola il valore medio dei pixel compresi nelle varie label, si considera il valore come phantom di riferimento e si associa al relativo valore di intensità.



In base alla densità, si assegnano i materiali ad ogni elemento della mesh di volume. In linea di principio, per ogni densità potrei creare un materiale corrispondente con Modulo Elastico E_i ; questa è una soluzione poco fruibile e computazionalmente pesante da gestire in una simulazione → range di modulo elastico.

Posso invece fondere in un unico materiale tutti i materiali con differenza minore di una soglia.

Tutti questi passaggi sono utili per predire come reagirà il tessuto osseo all'impianto di un oggetto con caratteristiche diverse da quelle dell'osso.

COME POSSIAMO PREDIRRE IL BONE REMODELLING?

Ad esempio, il riassorbimento osseo causato dal fenomeno di stress shielding, causa una riduzione della densità ossea, che porta al conseguente indebolimento e rischio di frattura.



Secondo la legge proposta da Wolff, la variazione di densità ossea nel tempo può essere espressa come:

$$\frac{dP}{dt} = \beta \Delta S$$

S: funzione che tiene conto del livello di carico dell'osso.

Possiamo descriverlo utilizzando la Strain Energy Density (S).

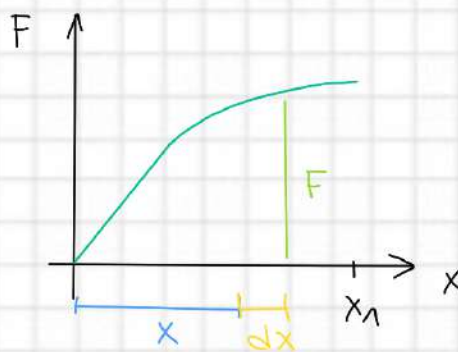
STRAIN ENERGY

Energia immagazzinata in un corpo a seguito della sua deformazione.

$$U = \int_0^{x_1} F dx$$

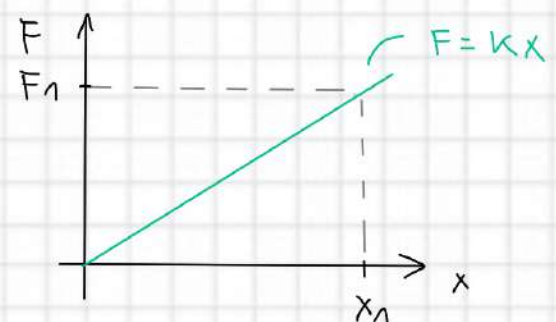


U è il lavoro per imporre alla trave un allungamento di 0 a x_1 .



Nel caso di un materiale elastico lineare:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{x_1} F dx = \int_0^{x_1} kx dx \\ &= \frac{1}{2} kx_1^2 = \frac{1}{2} F_1 x_1 \end{aligned}$$

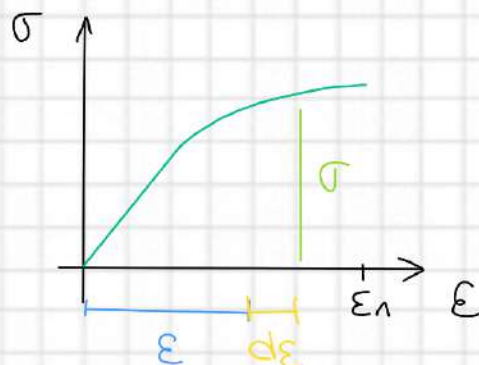


STRAIN ENERGY DENSITY (SED)

E' la strain energy per unità di volume ed è rappresentata dall'area sottesa alla curva stress-strain fino al punto di deformazione:

$$u = \frac{U}{V} = \int_0^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon$$

V: volume del corpo



Per la valutazione del bone remodelling la SED è calcolata per unità di massa ossea ρ mediata su un numero n di condizioni di carico (SEp):

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{U_i}{\rho}$$

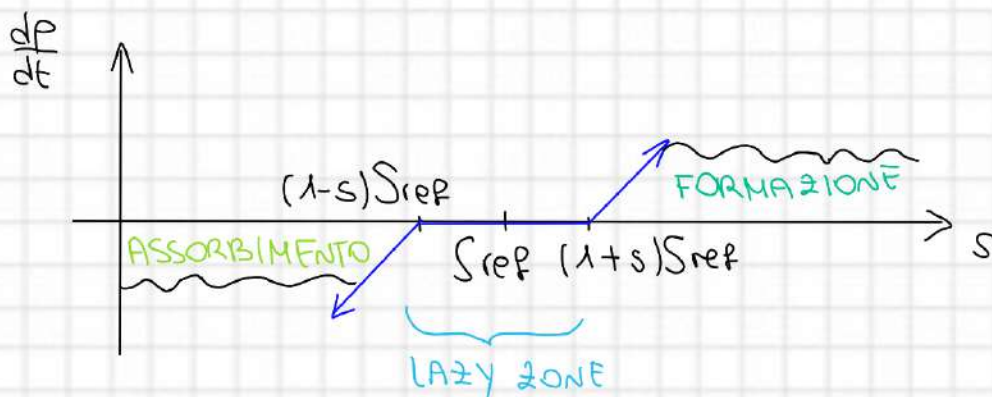
L'osso è considerato:

- sottocaricato se la SEp è inferiore a un valore di riferimento S_{ref} → riassorbimento osseo,
- sovracaricato se la SEp è superiore a un valore di riferimento S_{ref} .

Nel caso specifico di protesi d'anca S_{ref} sarà il valore della funzione in assenza della protesi nelle medesime condizioni di carico.

Si è osservato che non tutte le variazioni di SED conducono a un riassorbimento o ad un'opposizione di tessuto. Esiste una soglia di variazione sotto la quale non si innesca il bone remodelling detta threshold level, dead zone o lazy zone.

Il bone remodelling si innesca quando il valore di SED esce dall'intervallo $(1 \pm s)S_{ref}$



$$\frac{dp}{dt} = B S$$

PROPORZIONALITÀ

Il bone remodelling può essere espresso come:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = B [S - (1-s)S_{ref}] \\ \frac{dp}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\text{se } S < (1-s)S_{ref}$$

$$\text{se } (1-s)S_{ref} < S < (1+s)S_{ref}$$

$$\left\{ \frac{dp}{dt} = B[S - (1+s)S_{ref}] \right. \quad \& \quad S > (1+s)S_{ref}$$

Solitamente si sceglie B in relazione a P . Ad esempio, consideriamo due persone una con un tessuto osseo normale e l'altra che soffre di osteoporosi, non potremo utilizzare la stessa B perché non staremmo descrivendo la realtà. Si dovrebbe usare un parametro dipendente dalla densità quindi:

$$B = a(p)$$

In questo caso si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{dt} = a(p)[S - (1-s)S_{ref}] \\ \frac{dp}{dt} = 0 \\ \frac{dp}{dt} = a(p)[S - (1+s)S_{ref}] \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \& \quad S < (1-s)S_{ref} \\ \& \quad (1-s)S_{ref} < S < (1+s)S_{ref} \\ \& \quad S > (1+s)S_{ref} \end{array}$$

FALLIMENTO

Quando si ha un'elevata probabilità di vedere fallire l'impianto per via della frattura dell'osso che lo circonda? Sono state proposte varie formulazioni che legano tale probabilità alla densità dell'osso, ad esempio:

$$f(\sigma) = \frac{1}{S_t S_c} \sigma_n^2 + \left(\frac{1}{S_t} - \frac{1}{S_c} \right) \overline{\sigma_n} + \frac{1}{S_s^2} \tau^2$$

RESISTENZA ALLA TRAZIONE RESISTENZA ALLA COMPRESSIONE SFORZO NORMALE IMPIANTO - OSSO RESISTENZA AL TAGLIO SFORZO A TAGLIO IMPIANTO - OSSO

Dipende dalla resistenza del tessuto a una certa di sollecitazione e dal tipo di sollecitazione che avviene.

Assunzione: il fallimento avviene nella zona circostante alla protesi.

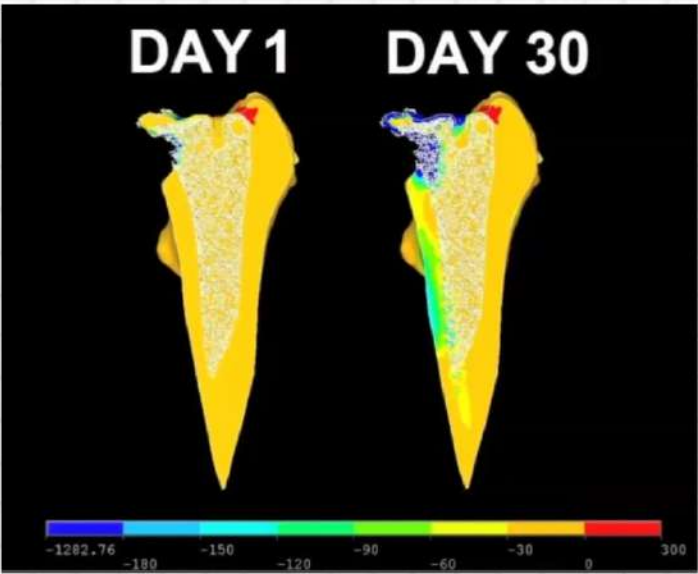
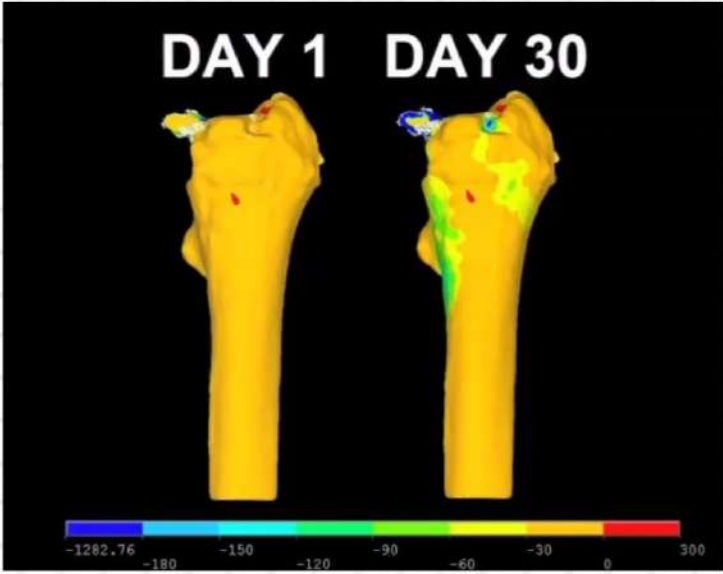
$$\begin{array}{ll} f(\sigma) \gg 1 & \text{alta probabilità di fallimento} \\ f(\sigma) \ll 1 & \text{bassa probabilità di fallimento} \end{array}$$

Ci affidiamo a dei valori di letteratura che vanno a legare i vari parametri alla densità:

$$\begin{array}{l} S_t = 14,5 \rho^{1,71} \\ S_c = 32,4 \rho^{1,85} \\ S_s = 21,6 \rho^{1,65} \end{array}$$



ES:



SIMULAZIONE DELLA BIOMECCANICA VASCOLARE

Un altro obiettivo molto importante e attuale è la simulazione, in particolare analizzeremo la simulazione della biomeccanica vascolare.

Ad oggi i simulatori sono estremamente semplificati, un obiettivo è quello di creare manichini dai dati del paziente. Si utilizza spesso la macchina 3D.

TESSUTO VASCOLARE

Esistono due tipologie:

- arterie,
- vene.

Si compongono di un lume centrale e di una parete che è composta da:

- tunica esterna,
- tunica media,
- tunica interna.

Le arterie solitamente possiedono un lume più piccolo della rispettiva vena, sono più tondeggianti e hanno una parete più spessa dato che hanno un contenuto muscolare maggiore delle vene siccome hanno la funzione di trasmissione dell'onda sfigmica verso le vie più periferiche.

Le arterie si dividono in arterie di:

- grosso calibro: (es aorta che porta il sangue dal cuore) sono caratterizzate da un contenuto elastico maggiore, grazie alla presenza di fibre striate;
- medio calibro, sono caratterizzate da un contenuto muscolare maggiore, grazie alla presenza di fibre striate;
- piccolo e piccolissimo calibro, (arteriole e capillari): caratterizzati da muscolatura liscia, avviene una regolazione della resistenza periferica che dà un contributo alla regolazione della pressione.

Quindi riassumendo, le grandi arterie elastiche, ed in particolare l'aorta, rivestono due fondamentali funzioni fisiologiche:

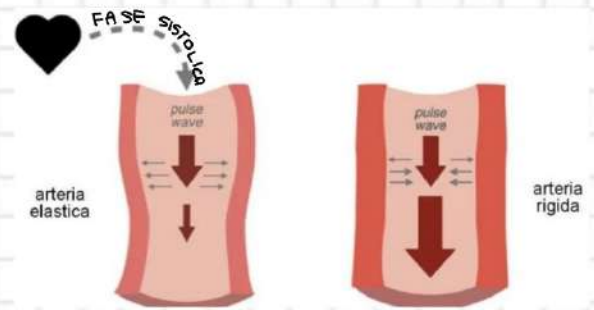
1. consentono la conduzione del sangue dal cuore alle arterie di resistenza (quelle più piccole),
2. permettono la trasformazione di un flusso pulsatile, generato dall'azione cardiaca, in uno continuo proprio dei tessuti periferici.

Negli ultimi anni si è assistito ad un aumento esponenziale dell'interesse della comunità scientifica e medica per le proprietà meccaniche/funzionali delle grandi arterie, in particolare per la rigidità (stiffness) o il suo inverso (compliance = deformabilità) arteriosa.

ELASTICITA' DEI VASI - STIFFNESS

La stiffness arteriosa si definisce come la pressione necessaria per ottenere una determinata dilatazione in un segmento arterioso.

L'onda pulsante che arriva (onda incidente) provoca una dilatazione del vaso, ha un ritorno elastico e riflette l'onda; se il tessuto è rigido l'onda è riflessa subito $\Rightarrow$ l'onda avanza molto più velocemente.



L'aumento della velocità sia dell'onda incidente sia di quella riflessa fa sì che l'onda riflessa si fonda con quella incidente più precocemente.

L'aumento della rigidità arteriosa è molto più marcato nelle arterie elastiche (aorta e carotidi) che nelle arterie muscolari (più periferiche).

All'aumentare della stiffness arteriosa, la rigidità aortica può raggiungere e superare quella periferica, riducendo o addirittura invertendo il normale gradiente centro periferia che è il principale responsabile dell'onda sfimica.

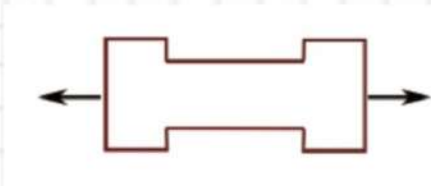
TEST DIRETTI PER LA CARATTERIZZAZIONE DEI TESSUTI

Come per il tessuto osseo esistono dei metodi diretti di misura delle proprietà meccaniche ma andare a prelevare il campione non è praticabile per fini predittivi.

I principali sono:

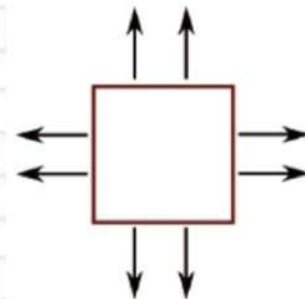
Prova di trazione uniassiale

in questo caso si devono prendere due provini uno deve essere preso nella direzione longitudinale e l'altro nella direzione trasversale.



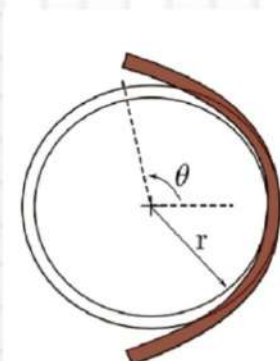
Prova di trazione biassiale

basta prendere un provino dato che già si considera il contributo nelle due direzioni.



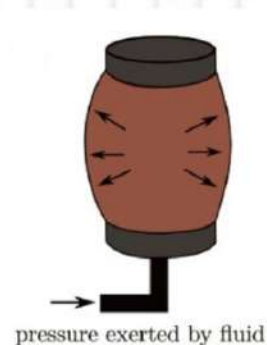
Opening angle

si studia il pre-tensionamento delle fibre.



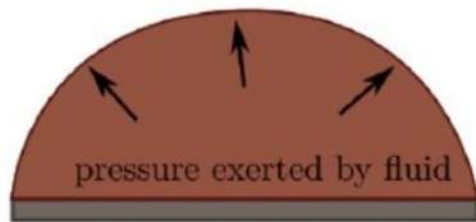
Inflation-extension test

si misura la dilatazione del vaso.



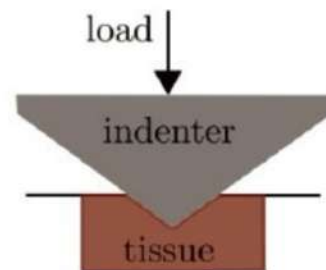
Bulge inflation test

si misura la dilatazione del vaso



Nano-indentation

si valuta il segno lasciato dall'indentatore sul tessuto.



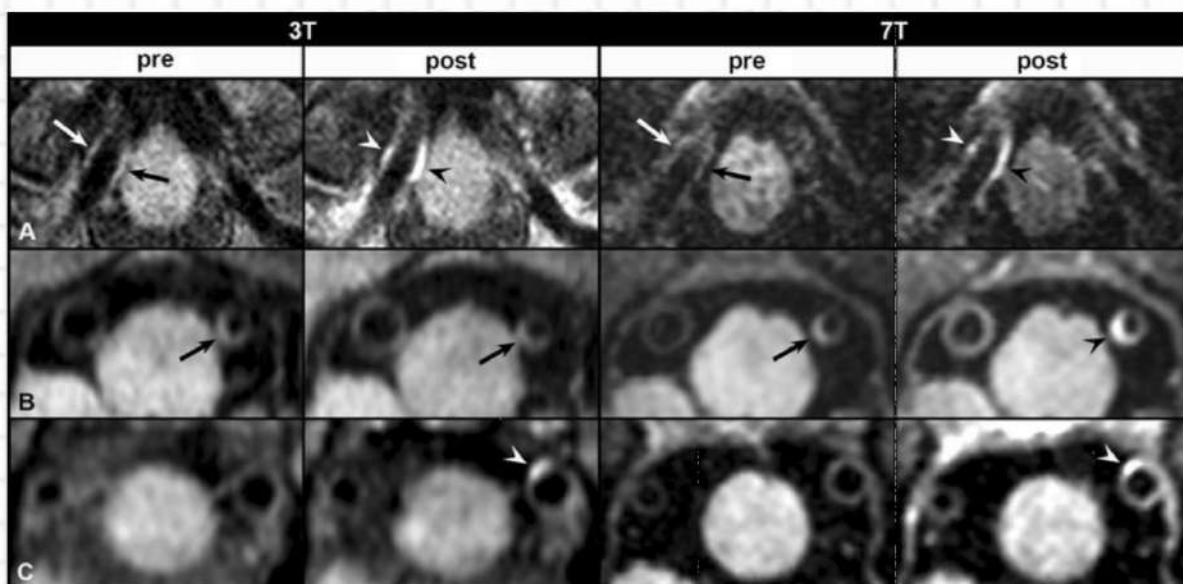
TEST INDIRETTI PER LA CARATTERIZZAZIONE DEI TESSUTI

Nella CT la parete vascolare è del tutto invisibile, quello che si può ricostruire è il sangue all'interno del vaso.

Quella nella CT è l'aorta messa in evidenza grazie a un liquido di contrasto.



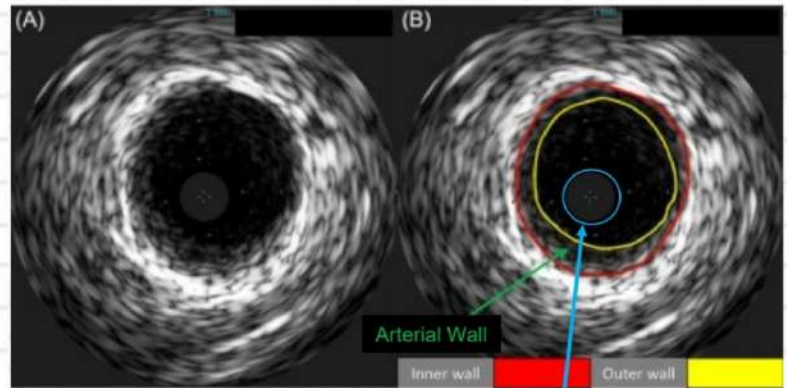
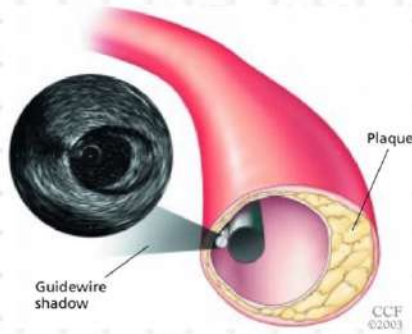
Con la risonanza magnetica si intravede qualcosa, ma non è una tecnica che si utilizza in questi casi. Inoltre i macchinari utilizzati non si trovano facilmente in clinica.



La tecnica che permette di vedere in vivo la parete vascolare esiste ma è un po' invasiva ed è detta IVUS (intravascular ultrasonography). Si tratta di una piccola sonda applicata a un catetere che si inserisce all'interno del vaso. Le immagini che si ottengono sono in 2D.

Pro: info morfologiche sulle pareti del vaso

Contro: metodica invasiva



Si vanno ad analizzare informazioni dinamiche. Abbiamo tre possibilità:

1. Pulse Wave Velocity: si valuta come viaggia l'onda pressoria attraverso i vasi. Come dicevamo, a seconda del vaso, si ha un movimento dell'onda pressoria differente: più rapido con pareti rigide, più lento con pareti elastiche.
2. Imaging 4D: immagine 3D catturata nel tempo.
3. Elastosonografia: indagine di tipo ecografico che sulla base di come si riflette l'onda; ci da informazioni sulle proprietà meccaniche del vaso.

PULSE WAVE VELOCITY (PWV)

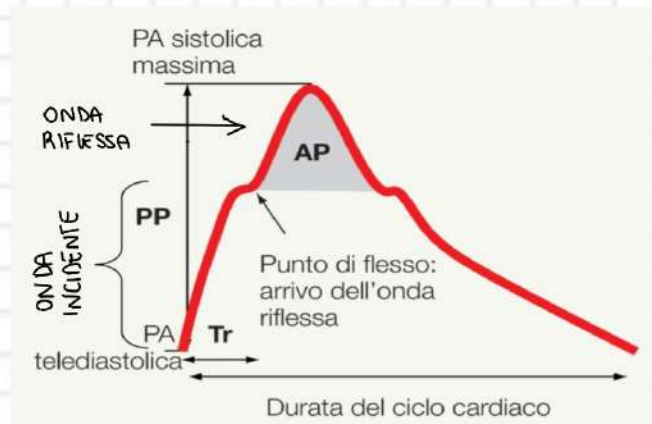
Utilizzata come misura della stiffness di un'arteria → si valuta come viaggia l'onda pressoria (o sfigmica) attraverso i vasi e si basa sulla dipendenza della velocità di trasmissione dell'onda sfigmica dalla rigidità arteriosa. Si ha:

1. Contrazione del ventricolo: l'energia viene trasferita all'aorta generando due diversi fenomeni ondulatori.
2. Le onde si propagano lungo l'albero arterioso in funzione delle proprietà funzionali e strutturali dello stesso:
 - un'onda di flusso, che procede a bassa velocità (circa 1 m/s in aorta) e si attenua procedendo dal centro verso la periferia;
 - un'onda sfigmica (Pulse Wave), che procede a velocità molto superiore (tipicamente 4-8m/s nell'aorta normale) e che ha caratteristiche differenti e del tutto peculiari.

L'onda sfigmica avanza nell'albero vascolare, con velocità crescente in direzione periferica. Essa avrà un ritardo temporale dal livello centrale a quello periferico.

L'onda sfigmica è composta da:

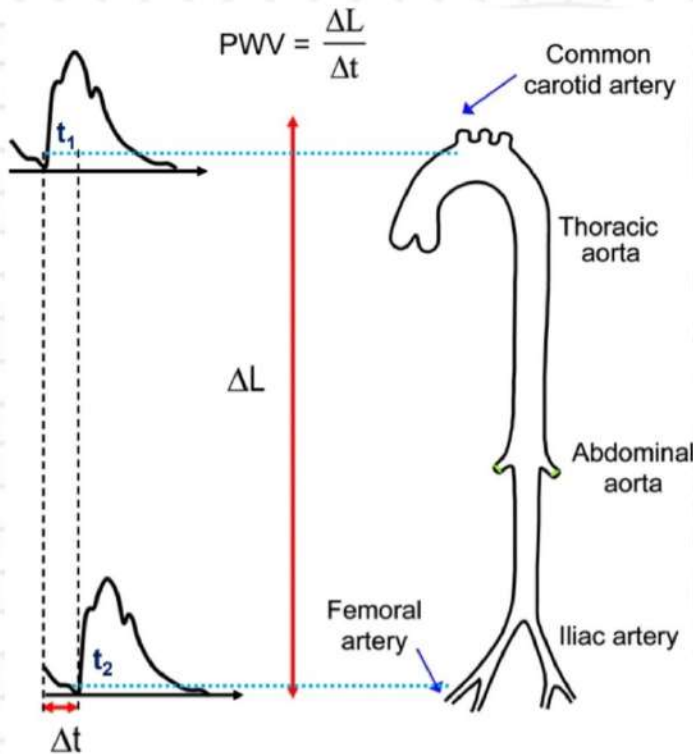
- onda incidente: onda che impatta direttamente contro il vaso che fa dilatare il tessuto vascolare,
- onda riflessa: data dal ritorno elastico delle pareti vascolari.



Misurando l'onda sfigmica in due punti a distanza nota, posso sapere in quanto tempo ha percorso. Si può misurare in diversi modi:

- Segnale tonometrico: prendo un vaso superficiale (carotide, arteria femorale) e misuro la pressione interna in base alla forza necessaria per bloccarne il flusso.
- Misura con trasduttore piezoelettrico
- Rilevazione Doppler
- Segnale impedenziometrico

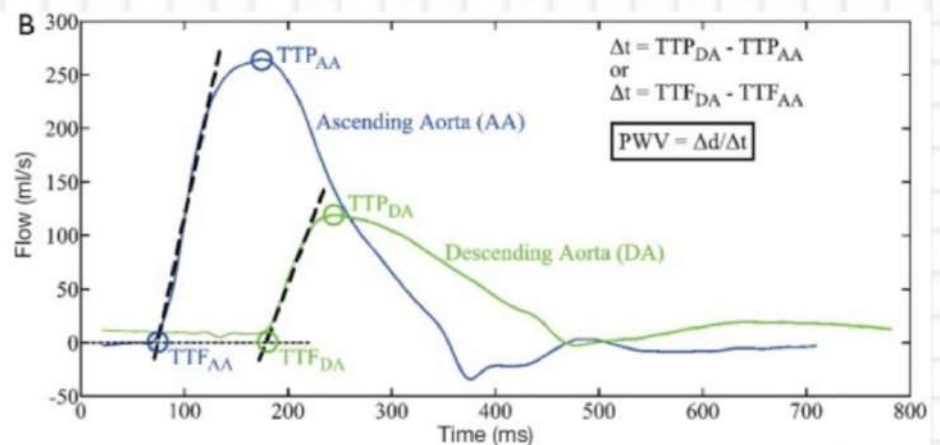
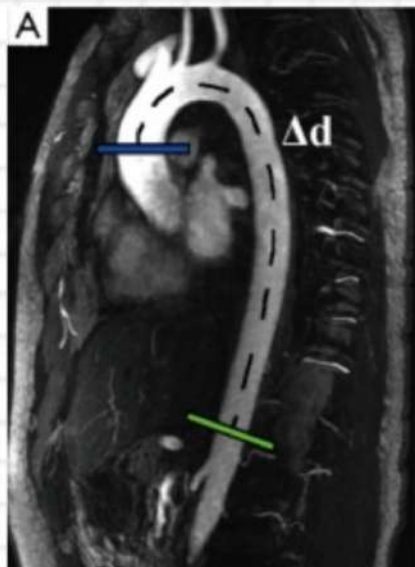
ES: segnale tonometrico → si misura la pressione nella carotide e nell'arteria femorale dato che hanno una bella distanza e così è più facile misurare lo scarto temporale.



La carotide è più vicina al cuore di quanto non sia l'arteria femorale quindi all'arteria femorale mi aspetto di vedere passare l'onda pressoria con un certo ritardo temporale e così è. Per calcolare la velocità mi serve una distanza effettiva → prendere la distanza longitudinale è una semplificazione, il modo più preciso è avere una imaging. Ad esempio, una risonanza magnetica che permetta di calcolare il percorso effettivo (centerline).

ES: segnale tonometrico → aorta ascendente e aorta addominale.
La tecnica di imaging utilizzata è la risonanza magnetica

La PWV è utilizzata come misura della stiffness di un'arteria. Più il valore di PWV è alto, più è veloce l'onda sfigmica quindi più è rigida la parete.



Torna utile legare PWV con il modulo elastico E. Questa relazione è stata teorizzata per la prima volta nel 1878 da due scienziati olandesi, Moens e Korteweg:

$$PWV = \sqrt{\frac{Eh}{\rho D}} \Rightarrow E = \frac{PWV^2 \rho D}{h}$$

con:

- E: modulo elastico,
- h: spessore della parete arteriosa,
- ρ : densità del sangue,
- D: diametro dell'arteria.

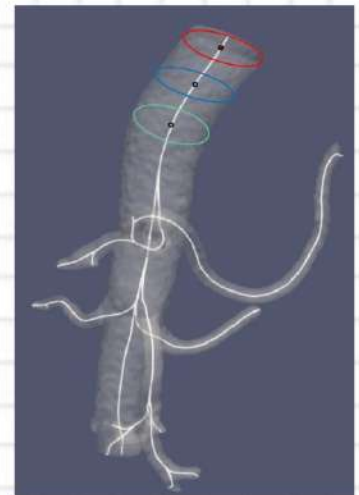
Ci sono però dei problemi legati a come e dove calcolare tali valori.

PWV: come ricaviamo il valore locale? Si usa la relazione che dipende dal diametro dato che è calcolabile puntualmente. Tale formula viene utilizzata per $D > 5$ mm.

$$PWV(D) = \frac{13,3}{D^{0,3}}$$

h (spessore parete arteriosa): anche in questo caso è possibile correlarlo al diametro: più il vaso è largo, più la parete è spessa.

D (diametro arteria): dove ricaviamo il valore? Ricavata con tecniche di imaging.



ρ (densità del sangue) $\rightarrow$ misurabile (valori normali medi: 1,055 - 1,066 g/cm³)

COME SIMULARE LA BIOMECCANICA IN VITRO?

Quindi abbiamo capito che è possibile calcolare il diametro del vaso del paziente e da lì ricavare lo spessore della parete, la PWV e infine il modulo elastico. Voglio riprodurre un phantom con queste caratteristiche:

	D_mean [mm]	Spessore [mm]	PWV $\left[\frac{m}{s}\right]$	E [MPa]
Abdominal Aorta A	12.200	1.064	6.280	0.463
Celiac A	7.350	0.783	7.311	0.514
Celiac B	5.050	0.649	8.182	0.534
Hepatic	4.900	0.641	8.256	0.534
Gastric	3.100	0.536	9.472	0.532
Splenic	4.050	0.591	8.742	0.537
Superior Mesenteric	7.500	0.791	7.267	0.513
Abdominal Aorta B	11.400	1.018	6.409	0.472
Renal	5.200	0.658	8.111	0.533
Abdominal Aorta C	11.800	1.041	6.343	0.468
Abdominal Aorta D	11.300	1.012	6.426	0.473
Inferior Mesenteric	3.950	0.586	8.808	0.536
Abdominal Aorta E	10.600	0.971	6.550	0.480
Common Iliac	7.450	0.789	7.281	0.513
External Iliac	6.250	0.719	7.675	0.525
Inner Iliac	4.000	0.588	8.775	0.537
	<i>*da letteratura es. Raymond_2009</i>	<i>*calcolati in funzione di D_mean con regressione da dati di letteratura</i>	<i>*Raymond_2009</i>	$E = \frac{PWV^2 \rho D}{h}$

$$E_{VASO} = \frac{PWV^2 \rho D}{h_{VASO}}$$

$$\text{con } PWV(D) = \frac{13,3}{D^{0,3}}$$

p noto

$h_{VASO}(D)$

$$E_{VASO} \simeq E_{PHANT}$$

$$\Rightarrow h_{PHANT} = \frac{PWV^2 \rho D}{E_{PHANT}}$$

devo cercare un materiale per ricostruire quel vaso che abbia un modulo elastico il più simile possibile a quello del vaso.

Ad esempio, supponiamo di prendere l'aorta addominale che ha $E = 0.7 \text{ MPa}$.

Se trovo un materiale che ha modulo elastico dello stesso valore allora considererò lo spessore uguale a quello reale del paziente; se invece ho un materiale che ha $E = 1.5 \text{ MPa}$ dovrò considerare uno spessore minore.

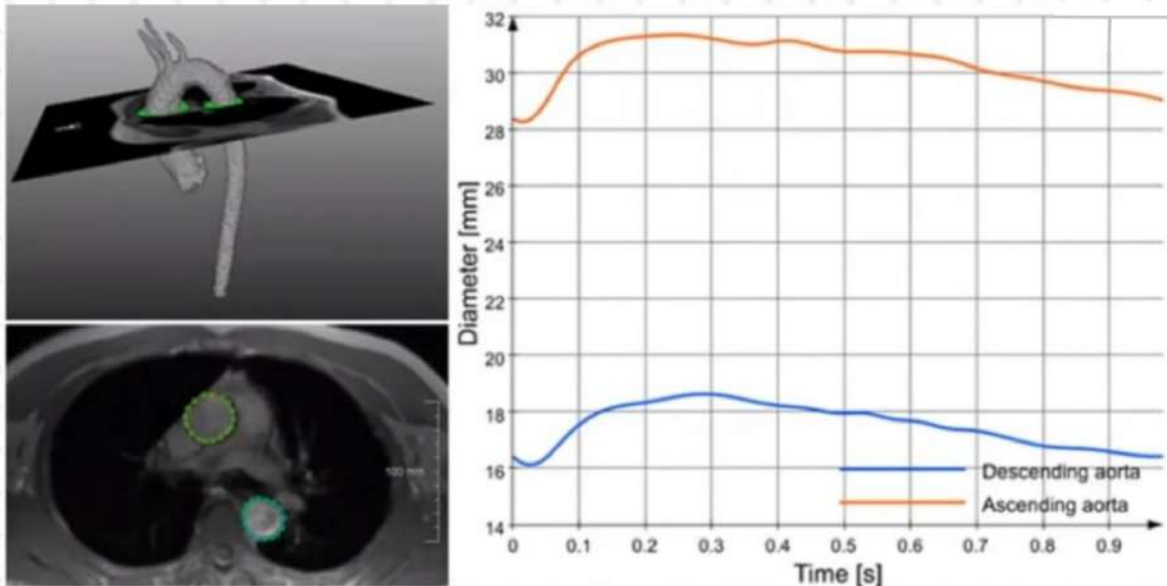
E' fondamentale trovare un materiale con modulo elastico il più simile possibile a quello di interesse.

Ad esempio, supponiamo di prendere l'aorta addominale che ha $E = 0.7 \text{ MPa}$. Se io ho un materiale che ha $E = 10 \text{ MPa}$ dovrò avere uno spessore $h = 4 \mu\text{m} \rightarrow$ problema di tipo pratico.

TEST INDIRETTI PER LA CARATTERIZZAZIONE DEI TESSUTI

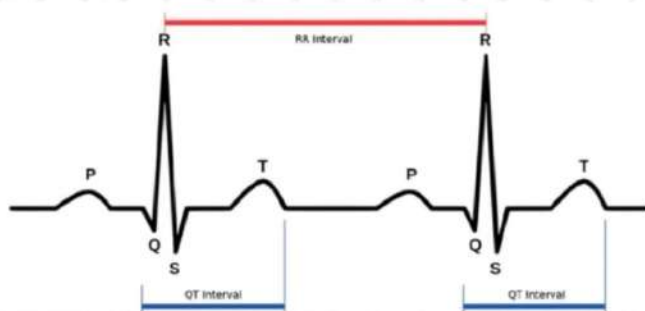
IMAGING 4D

Per 4D si intende un segnale 3D che evolve nel tempo, in particolare l'evoluzione nel tempo non va fatta su tutto il 3D ma su una zona preselezionata (solitamente un piano):



In particolare, analizzeremo la variazione del diametro del lume vascolare durante il ciclo cardiaco, in cui il lume si allarga in sistole e si restringe in diastole.

Si parla di cardiac gating, ovvero sapere in che punto del ciclo cardiaco siamo ogni volta che scattiamo una fotografia, in questo modo si può ricostruire il tempo che passa tra una acquisizione e la successiva. Solitamente si utilizza il tracciato cardiaco, in particolare l'onda R (molto distinguibile).

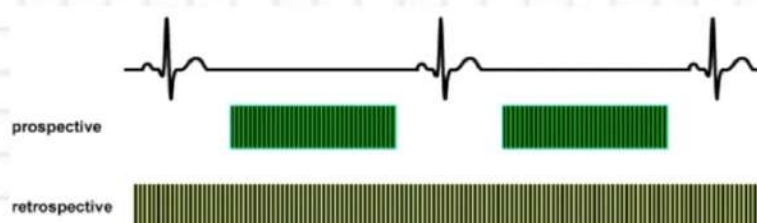


L'intervallo RR è solitamente espresso in ms. Tuttavia, solitamente viene utilizzata l'unità di misura bpm:

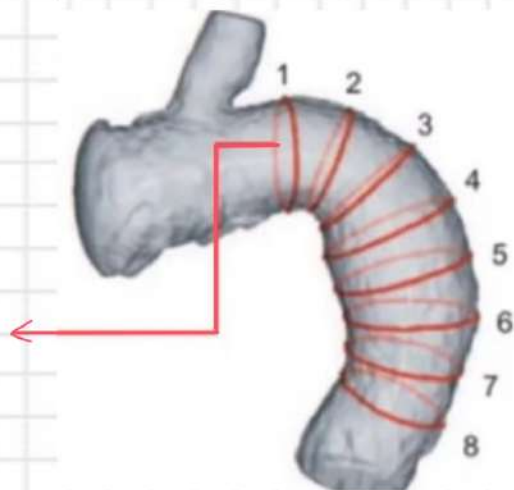
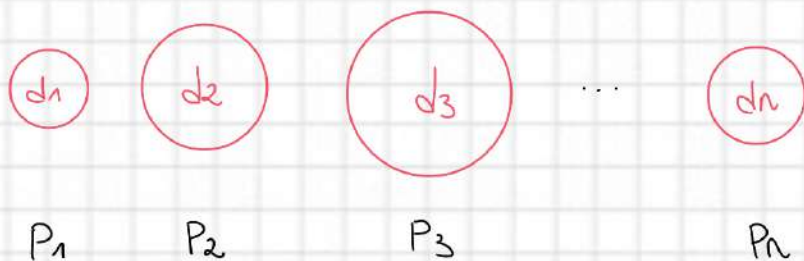
$$60 [\text{bpm}] = 10^3 [\text{ms}]$$

Esistono vari modi per effettuare questo tipo di acquisizione:

- Prospective gating: la macchina legge automaticamente una onda R, solitamente non parte immediatamente l'acquisizione ma viene lasciata una piccola finestra definita con il parametro trigger delay. Quindi poi parte l'acquisizione e dopo un certo periodo di tempo si ferma, prima dell'onda successiva:
- Retrospecting gating: si continua ad acquisire e poi si organizzano le immagini sulla base del ciclo cardiaco. Ciò mi permette di coprire una percentuale di acquisizione molto maggiore.



Vogliamo arrivare a capire come varia il diametro del lume nel tempo:

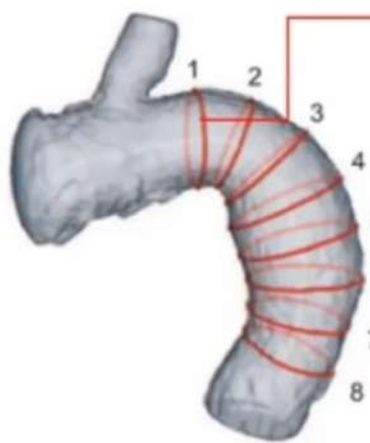


Vediamo diametri differenti a istanti di acquisizione differenti. Posso arrivare a calcolare una stima del modulo elastico:

$$E_i = \frac{\Delta \sigma_i}{\Delta \epsilon_i}$$

hp: tubo a pareti sottili, (spessore $h \ll R$ raggio del lume)

$$E_i = \frac{\Delta P_i}{2h_i \frac{\Delta D_i}{D_{i, \min}^2}} \approx \frac{\overbrace{P_{Si} - P_{Di}}^{\text{PRESSIONE SISTOLICA} \quad \text{PRESSIONE DIASTOLICA}}}{2 \underbrace{D_{Si} - D_{Di}}_{\text{DIAMETRO IN SISTOLE} \quad \text{DIAMETRO IN DIASTOLE}} D_{Di}^2}$$



%RR	D _i [mm]
0	25,82
5	26,32
10	26,62
15	26,72
20	26,76
25	26,94
30	26,98
35	27,12
40	26,94
45	26,7
50	26,6
55	26,36
60	26,28
65	26,22
70	26,14
75	26,02
80	25,92
85	25,9
90	25,68
95	25,66
100	25,82

L'altro parametro che ci può interessare è il rate di deformazione, ovvero come avviene la deformazione nel tempo in termini di durata $\frac{d\epsilon_i}{dt}$

ES: 70 bpm

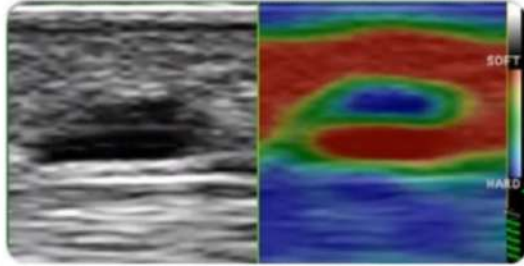
$$\begin{aligned} RR &= \frac{60.000}{\text{bpm}} = \frac{60.000}{70} \\ &= 857,14 \text{ ms} \\ &= 0,86 \text{ s} \end{aligned}$$

$$\frac{d\epsilon_i}{dt} = \frac{D_{Si} - D_{Di}}{t_{Si} - t_{Di}} = 0,12 \frac{1}{s}$$

ELASTOSONOGRAFIA

Si utilizza uno strumento a ultrasuoni per avere informazioni sul comportamento meccanico del tessuto, tipicamente tessuto molle.

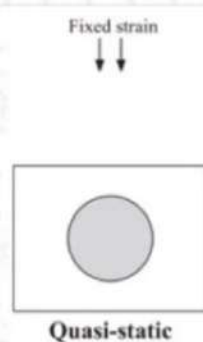
In pratica l'elastosonografia cerca di fare in modo automatico quello che il medico fa tramite la tecnica della palpazione, quindi va a toccare una regione e sente se la risposta del tessuto sottostante è normale oppure se ci sono alterazioni (zone più o meno dure). Solitamente è utilizzata per evidenziare masse tumorali.



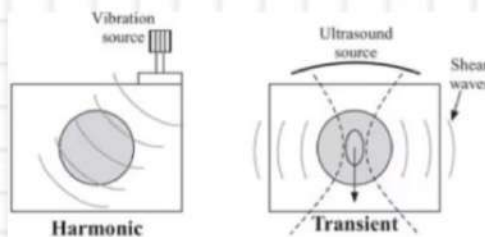
Quindi si va a perturbare il tessuto con una specifica sorgente, si misura la risposta meccanica che il tessuto sta dando e da questa risposta si va a inferire le proprietà meccaniche del tessuto.

Le tecniche sono:

- applicazione di una sollecitazione quasi statica: si applica manualmente una pressione sul tessuto e si vede come esso risponde; conoscendo la pressione esercitata e guardando lo spostamento che è causato, si calcola la deformazione che ha subito la struttura. (ES: ecografia)



- applicazione di una sollecitazione dinamica: si perturba il tessuto con un'onda acustica.



Nell'approccio dinamico possiamo distinguere due diverse tipologie di onde:

- Longitudinali (di compressione): si propagano molto velocemente all'interno del corpo, sono usate per l'imaging.
- Trasversali (a taglio): si può calcolare una stima del modulo elastico sulla base di come il tessuto trasmette la perturbazione. Sono generate a bassa frequenza quindi sono più lente.

Rispetto alle altre tecniche viste, l'elastografia ci riesce a dare una mappa ad alta risoluzione di come varia il modulo elastico nella zona che stiamo esaminando.