

Serie di Funzioni

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia data la successione $\{f_n\}$ di funzioni: $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$

Vogliamo studiare $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

Def: se esiste $I^* \subseteq I$ intervallo tale che $\sum f_n(x)$ converge in ogni punto di I^* , allora la serie converge puntualmente in I^*

Come si verifica? Si fissa x e si controlla la convergenza utilizzando i criteri già visti per le serie numeriche (Analisi 1 $\rightarrow$ radice, rapporto, confronto)

Def: Sia $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$, se esiste $\{a_n\}$ tale che:

I) $|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}$
II) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$ ($\sum a_n$ converge)

allora $\sum f_n$ converge totalmente in I

Conseguenze

Se $\sum f_n$ converge totalmente su I allora converge puntualmente su I . Non vale il viceversa.

Teoremi sull'eredità

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ e $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in I$ $\rightarrow$ convergenza puntuale

• Continuità

Se f_n sono continue e $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge tot. in $I \Rightarrow f(x)$ è continua in I $\rightarrow$ somma della serie

• Derivabilità

Se f_n sono derivabili e $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$ converge tot. in $I \Rightarrow f(x)$ è derivabile e vale che:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right\} = f'(x) \quad \forall x \in I$$

• Integrabilità

Se f_n sono integrabili su $[a,b] \subseteq I$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge tot. in $[a,b] \Rightarrow f(x)$ è integrabile su $[a,b]$

vale che, $\forall x \in I$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \int_a^b f_n(x) dx \right\} = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Serie di Potenze

Def: Una serie di potenze di centro $x_0 \in \mathbb{R}$ è una serie di funzioni nella forma: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$

$\{a_n\}$ è detta successione dei coefficienti

Le serie di potenze hanno un raggio di convergenza $R \in [0, +\infty)$ oppure $R = +\infty$ tale che:

$\begin{cases} R=0 & \text{la serie converge solo in } x_0 \\ R=+\infty & \text{la serie conv. puntualmente su } \mathbb{R} \\ R \in (0, +\infty) & \text{la serie conv. punt. in } I = (x_0 - R, x_0 + R) \text{ e non conv. se } |x - x_0| > R \end{cases}$

N.B. a priori non conosco il comportamento agli estremi dell'intervallo

$\hookrightarrow$ per studiarlo sostituisco $x_0 + R$ e $x_0 - R$ al posto di x e studio la serie come in Analisi 1

Come ricavo R ? Attraverso 2 criteri:

• criterio del rapporto $\rightarrow \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

• criterio della radice $\rightarrow \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

$\hookrightarrow$ utile ricordare che $\forall a \in \mathbb{R}: \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^a} = 1$

$$\rightarrow \text{se } x_0 = 0$$

Serie di Taylor e McLaurin

Def: Una funzione $f(x)$ si dice analitica in (a,b) se $\forall x \in (a,b)$ f è sviluppabile in serie di Taylor con centro in x_0 e $R > 0$.

I coefficienti a_n degli sviluppi sono dati da: $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$ da cui $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$

Essendo $f(x)$ sviluppabile in serie di Taylor, allora risulta essere di classe $C^\infty(a,b)$

Serie da sapere

• Geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad x \in (-1; 1)$

• Esponenziale $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

• $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad x \in (-1; +1]$

• $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad x \in [-1; 1]$

$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha!}{n! (\alpha-n)!}$

Si trova anche come $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$

Teorema di Abel

Sia $R \in (0, +\infty)$ il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x) \quad \forall x \in (-R; R)$

Se la serie converge in $x=R$ (cioè $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ conv.)

Allora:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n = \lim_{x \rightarrow R^-} f(x)$$

Analogamente se converge $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n$, allora:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n = \lim_{x \rightarrow -R^+} f(x)$$

Funzioni Vettoriali

Dato un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, una funzione vettoriale è una funzione del tipo: $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_m(t))$$

$\hookrightarrow$ vettore in $\mathbb{R}^m$, vettore di m funzioni scalari

Def: dato $I \subseteq \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ e $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$

Si dice che $\lim_{t \rightarrow t_0} \gamma(t) = \vec{\ell}$, con $\vec{\ell} \in \mathbb{R}^m$ se e solo se $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\gamma(t) - \vec{\ell}\| = 0$

Valgono: th unicità limite, th su somma e prodotto di limiti, definizione di funzione continua.

$\gamma(t)$ è continua in t_0 se e solo se $\lim_{t \rightarrow t_0} \gamma(t) = \gamma(t_0)$

Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, una curva continua in $\mathbb{R}^m$ è una funzione $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$

PROPRIETÀ

- una curva continua si dice "cammino"
- una curva si dice chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$, con $I = [a, b]$
- una curva si dice semplice se $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ per $t_1 \neq t_2$ (unica eccezione $t_1 = a$ e $t_2 = b$)

Def: Si chiama sostegno di una curva l'immagine della funzione $\gamma(t)$ (cioè la linea geometrica, indipendentemente da come è percorsa).

Una curva γ è derivabile in $t_0 \in I$ se esiste finito il limite: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{h} = \gamma'(t_0)$

Def: Un arco di curva si dice regolare se $\gamma \in C^1(I)$ e $\gamma'(t) \neq \vec{0} \quad \forall t \in I$

Per una curva regolare possiamo definire il versore tangente: $\tau(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$

Lunghezza di una curva

Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ una curva regolare, allora:

- γ è rettificabile
- $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ (vale anche per curve regolari a tratti)

La lunghezza di una curva è invariante per cambi di parametrizzazione

Tipi di cambi di parametrizzazione

- parametrizzazione equivalente
- cambio di orientazione
- ascissa curvilinea, funzione $s(t)$ tale che $s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(t)\| dt$

Integrali di linea (I specie)

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ curva regolare, $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

Applicazioni

• Massa: $m = \int_{\gamma} f ds$ $\hookrightarrow$ densità lineare

• Baricentro: $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\vec{B}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ $\bar{x} = \frac{1}{m} \int_{\gamma} x f ds$, $\bar{y} = \dots$, $\bar{z} = \dots$

• Momento di inerzia: $I = \int_{\gamma} d^2 f ds$ d : distanza curva - asse di rotazione

Alcune parametrizzazioni:

- Segmento di estremi A e B (tratto le coordinate come vettori colonna)

$$\underline{r(t) = A + t(B - A)}, t \in [0, 1]$$

- Arco di circonferenza di centro $C(x_0, y_0)$ e raggio r :
$$\begin{cases} \underline{x(t) = x_0 + r \cos(t)} \\ \underline{y(t) = y_0 + r \sin(t)} \end{cases}$$

t : angolo formato dal raggio con il semiasse positivo delle ascisse. Per una circonferenza completa $t \in [0, 2\pi]$

- Ellisse di centro $C(x_0, y_0)$ e semiasse a, b :
$$\begin{cases} \underline{x(t) = x_0 + a \cos(t)} \\ \underline{y(t) = y_0 + b \sin(t)} \end{cases}$$

Retta tangente ad una curva

Retta tangente a r nel punto P : $T(t) = r(t_0) + r'(t_0)(t - t_0)$

Dove t_0 è l'istante che verifica $P = r(t_0)$

Funzioni in più variabili:

$$A \subseteq \mathbb{R}^n, \vec{x} \in A, \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad f: A \rightarrow \mathbb{R}, \vec{x} \mapsto f(\vec{x})$$

In 2 dimensioni: $z = f(x, y); (x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$

Rappresentazione:

• grafici: $\text{graf}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in A, z = f(x, y)\}$

• curve di livello $L_c = \{(x, y) \in A: f(x, y) = c\}$

limiti e continuità

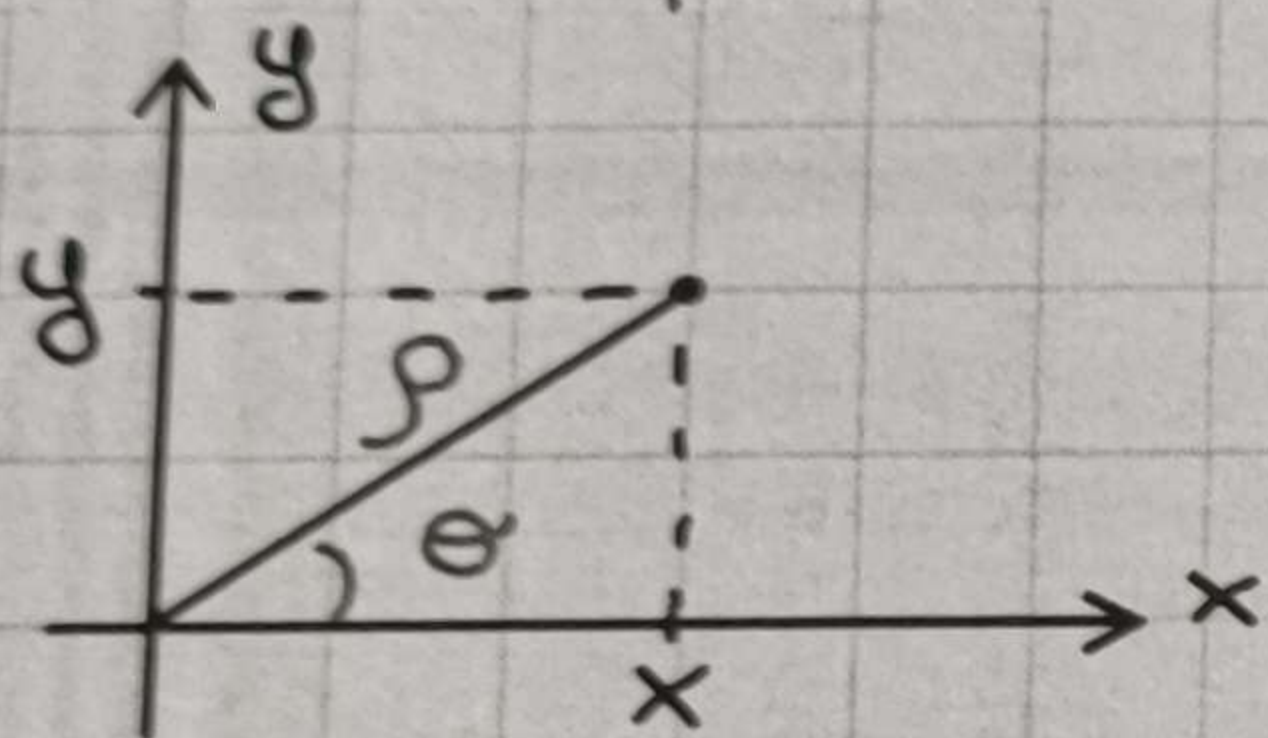
Sia $f(\vec{x})$ definita almeno in un intorno sferico di $\vec{x}_0$, il limite di f per $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$ è $\vec{L}$ se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - \vec{L}| < \varepsilon$$

$f(\vec{x})$ si dice continua in $\vec{x}_0$ se: $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

Coordinate polari:



$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Il passaggio in coordinate polari è utile per risolvere i limiti in 2 variabili:

$$f(x, y) \rightarrow f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = g(\rho) \quad \text{quindi} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} g(\rho)$$

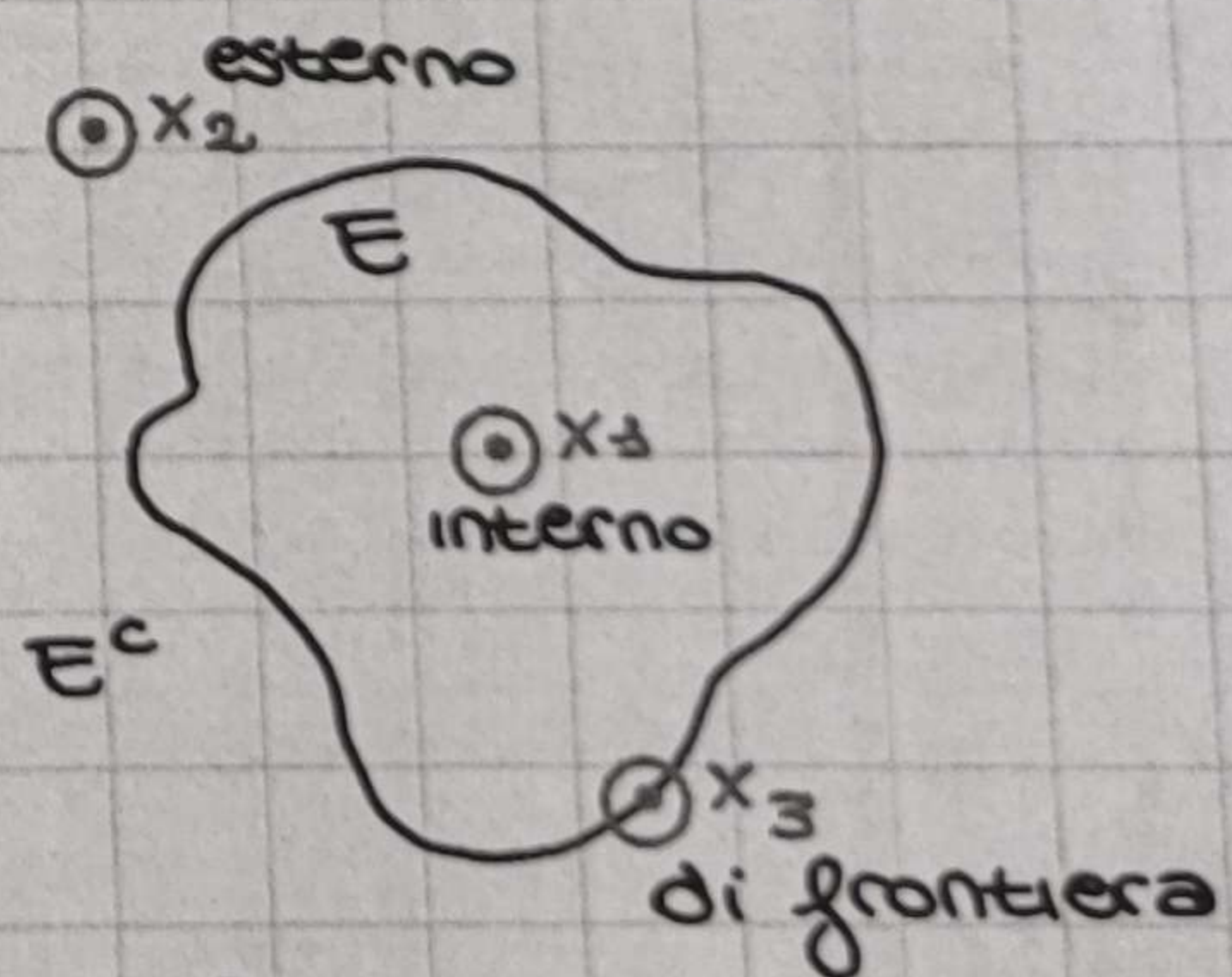
Se voglio mostrare che $f(x, y) \rightarrow L$ per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ uso le coordinate polari centrate in (x_0, y_0)

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos \theta \\ y = y_0 + \rho \sin \theta \end{cases}$$

Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

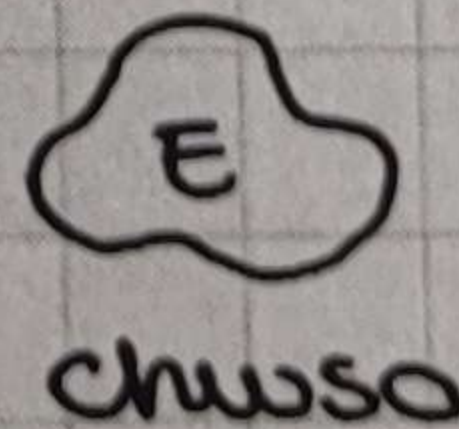
Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, un punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ si dice:

- interno ad E se esiste un intorno di $\vec{x}$ contenuto in E
- esterno ad E se esiste un intorno di $\vec{x}$ contenuto in E^c ($E^c = \mathbb{R}^n / E$)
- di frontiera per E se ogni intorno di $\vec{x}$ interseca sia E che E^c .

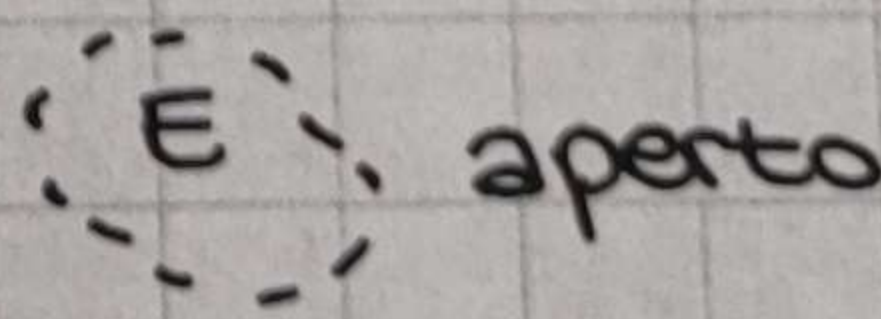


E si dice:

- aperto se tutti i suoi punti sono interni a E (non ci sono punti di frontiera)
- chiuso se il suo complementare (E^c) è aperto



chiuso



aperto

Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$

- la parte interna di E è l'insieme di tutti i suoi punti interni ($\overset{\circ}{E}$)
- la frontiera di E è l'insieme di tutti i suoi punti di frontiera (∂E)
- la chiusura di E è $\bar{E} = \overset{\circ}{E} \cup \partial E$

NOTA:

$$E \text{ è aperto} \Leftrightarrow \bar{E} = \overset{\circ}{E}$$

$$\text{in generale: } \overset{\circ}{E} \subseteq E \subseteq \bar{E}$$

$$E \text{ è chiuso} \Leftrightarrow E = \bar{E}$$

Derivabilità, differenziabilità, gradiente e piano tangente

Derivate parziali:

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $(x_0, y_0) \in A$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

Se esiste finito $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ allora f ammette derivata parziale

rispetto a x nel punto (x_0, y_0) .

Il valore del limite rappresenta la pendenza del grafico se mi muovo in direzione parallela all'asse x .
Lo stesso vale per gli altri assi ($\partial_x f$, $\partial_y f$, $\partial_z f$, ...) posso estendere ad $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Def: Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, f si dice derivabile in un punto del suo dominio se in quel punto esistono tutte le sue derivate parziali.

Il vettore che contiene le derivate parziali si chiama gradiente.

$$\nabla f = (\partial_x f; \partial_y f; \dots)$$

Def: Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con A aperto, $\bar{x}_0 \in A$

f è differenziabile in $\bar{x}_0$ se esiste un vettore $\bar{a}$ in $\mathbb{R}^n$ tale che:

$$\lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_0 + \bar{h}) - f(\bar{x}_0) - \bar{a} \cdot \bar{h}}{|\bar{h}|} = 0$$

$$\text{con } \bar{h} = \bar{x} - \bar{x}_0$$

Se f è differenziabile in $\bar{x}_0$, allora f è anche derivabile in x_0 e il vettore $\bar{a}$ corrisponde al gradiente di f in $\bar{x}_0$.

$$\bar{a} = \nabla f(\bar{x}_0)$$

Inoltre f è continua in $\bar{x}_0$.

Se f è differenziabile in $\bar{x}_0$, si dice iperpiano tangente al grafico di f in $\bar{x}_0$, l'iperpiano:

$$z = f(\bar{x}_0) + \nabla f(\bar{x}_0) \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0)$$

Se $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, equazione del piano in $P(x_0, y_0)$

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Def: $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $\bar{x}_0 \in A$, $\bar{v}$ versore. Si dice derivata direzionale di f rispetto a $\bar{v}$, nel punto $\bar{x}_0$, il limite:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_0 + t\bar{v}) - f(\bar{x}_0)}{t} = D_{\bar{v}} f(\bar{x}_0)$$

Se f è differenziabile in $\bar{x}_0$: $D_{\bar{v}} f(\bar{x}_0) = \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \bar{v}$ (formula del gradiente)

Se f ha tutte le derivate direzionali $\Rightarrow f$ derivabile

Schema

$f \in C^1(A) \Rightarrow f$ differenziabile in A (esiste piano tangente)

$\Downarrow$
 f continua in A
 f derivabile in A
 f ha derivate direzionali
vale formula del gradiente

Condizione sufficiente per la differenziabilità: Se f è derivabile in un intorno di $\bar{x}_0$ e le derivate parziali sono continue in $\bar{x}_0$, allora f è differenziabile in $\bar{x}_0$.

Invece

f continua, derivabile, dotata di tutte le derivate direzionali $\not\Rightarrow f$ differenziabile
 f derivabile, dotata di tutte le derivate direzionali $\not\Rightarrow f$ continua

Formule di derivazione

$$f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{cases} \bullet \nabla(ag + bg) = a\nabla f + b\nabla g \\ \bullet \nabla(f \cdot g) = (\nabla f)g + f(\nabla g) \\ \bullet \nabla(f/g) = \frac{(\nabla f)g - f(\nabla g)}{g^2} \end{cases}$$

Funzioni composte

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \quad \begin{array}{l} \gamma \text{ curva derivabile in } t_0 \\ f \text{ differenziabile in } \gamma(t_0) \end{array}$$

$$\nabla(g(f(x))) = g'(f(x)) \nabla f(x) \quad f \text{ differenziabile in } x_0, g \text{ derivabile in } f(x_0)$$

Derivate di ordine superiore

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right); \dots$$

Matrice Hessiana

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Th. di Schwarz

Se $f \in C^2(A) \Rightarrow H$ è simmetrica

$$\text{Differenziale primo } df(\bar{x}_0): \bar{h} \mapsto \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \bar{h} \in \mathbb{R}$$

$$\text{Differenziale secondo } d^2f(\bar{x}_0): \bar{h} \mapsto (Hf(\bar{x}_0)\bar{h}) \cdot \bar{h} \in \mathbb{R}$$

Formula di Taylor

$$f \in C^2(A), A \subseteq \mathbb{R}^n, \bar{x}_0 \in A$$

$$\bullet \text{ Resto di Lagrange: } f(\bar{x}_0 + \bar{h}) = f(\bar{x}_0) + \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \bar{h} + \frac{1}{2} \bar{h}^T (Hf(\bar{x}_0 + \delta \bar{h})) \bar{h}$$

$$\bullet \text{ Resto di Peano: } f(\bar{x}_0 + \bar{h}) = f(\bar{x}_0) + \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \bar{h} + \frac{1}{2} \bar{h}^T (Hf(\bar{x}_0) \bar{h}) + o(\|\bar{h}\|^2)$$

Ottimizzazione - Estremi liberi

Teorema di Fermat

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\bar{x}_0 \in A$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

Se f è derivabile in $\bar{x}_0$ e $\bar{x}_0$ è un punto di estremo relativo per $f \Rightarrow \nabla f(\bar{x}_0) = \vec{0}$

Classificazione dei punti stazionari

Studio della matrice Hessiana, $f \in C^2(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\bar{x}_0 \in A$ punto stazionario

- $H_f(\bar{x}_0)$ Definita positiva $\Rightarrow \bar{x}_0$ punto di minimo locale, forte
- $H_f(\bar{x}_0)$ Definita negativa $\Rightarrow \bar{x}_0$ punto di massimo locale, forte
- $H_f(\bar{x}_0)$ Indefinita $\Rightarrow \bar{x}_0$ punto di sella
- $H_f(\bar{x}_0)$ Semidefinita $\Rightarrow$ non posso dire nulla

Forme quadratiche

A matrice simmetrica, come capire il segno?

- autovalori
- Se A è una matrice 2×2 si controllano determinante e traccia
 - $\det A > 0$ e $\text{Tr} A > 0 \Rightarrow A$ def. positiva
 - $\det A > 0$ e $\text{Tr} A < 0 \Rightarrow A$ def. negativa
 - $\det A < 0 \Rightarrow A$ indefinita
 - $\det A = 0 \Rightarrow A$ semidefinita

Hessiano nullo

Come ci si comporta quando $\det(H_f(x_0, y_0)) = 0$?

Metodo del segno

- Calcolo $f(x_0, y_0) = c$
- Considero la nuova funzione $\tilde{f}(x, y) = f(x, y) - c$
- In questo modo $\tilde{f}(x_0, y_0) = 0$

$\rightarrow$ Se esiste almeno un intorno di (x_0, y_0) in cui $\tilde{f}$ è negativa $\forall (x, y) \neq (x_0, y_0) \Rightarrow (x_0, y_0)$ punto di max relativo

$\rightarrow$ Se esiste almeno un intorno di (x_0, y_0) in cui $\tilde{f}$ è positiva $\forall (x, y) \neq (x_0, y_0) \Rightarrow (x_0, y_0)$ punto di min relativo

$\rightarrow$ Se in ogni intorno di (x_0, y_0) la funzione assume sia valori positivi che negativi $\Rightarrow (x_0, y_0)$ punto di sella

Ad esempio posso studiare il comportamento della funzione:

- lungo l'asse x , calcolando $\tilde{f}(x, 0)$
- lungo l'asse y , calcolando $\tilde{f}(0, y)$
- lungo la bisettrice del I/III quadrante ($y=x$) calcolando $\tilde{f}(x, x)$

Funzioni convesse

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso

Def: f è convessa se $f(t x_2 + (1-t)x_1) \leq t f(x_2) + (1-t)f(x_1)$; $\forall x_1, x_2 \in A, \forall t \in [0, 1]$
segmento che unisce i due punti

Ovvero se il grafico del segmento sta sopra a quello della funzione

Def: f è concava se $-f$ è convessa

Risultati utili

I) f convessa $\Rightarrow$ f continua

$\Rightarrow$ f ha derivate parziali destre e sinistre

$\Rightarrow$ se f è derivabile in $\bar{x}_0$ allora è anche differentiabile in $\bar{x}_0$

II) f differenziabile $\Rightarrow$ sono equivalenti: a) f è convessa

b) la funzione sta sempre sopra al suo piano tangente

$$f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}_0) + \nabla f(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0), \quad \forall \bar{x}, \bar{x}_0 \in A$$

(se f concava ho la disuguaglianza opposta)

III) $f \in C^2(A)$ $\Rightarrow$ se la forma quadratica associata ad Hf è semidefinita positiva allora f è convessa

Applicazione ai problemi di ottimizzazione

- Se f è convessa, derivabile e $\bar{x}_0$ punto stazionario $\Rightarrow$ $\bar{x}_0$ è un punto di minimo assoluto
concava massimo

- Se f è strettamente convessa, derivabile e $\bar{x}_0$ punto stazionario $\Rightarrow$ $\bar{x}_0$ è un punto di minimo assoluto forte
concava massimo

Ottimizzazione vincolata

Trovare i massimi e i minimi di $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ soggetti ad un vincolo $G \subseteq \mathbb{R}^n$

Il vincolo può essere:

- rappresentato da un'equazione $\rightarrow$ studio il comportamento della funzione sulla curva descritta dal vincolo mediante uno dei metodi seguenti
- rappresentato da una disequazione $\rightarrow$ prima si studia l'andamento della funzione nei punti interni all'insieme (th. di Fermat, ottimizzazione libera); poi si considera la frontiera e si procede come nel primo caso

Metodi di ottimizzazione vincolata

1) Metodo parametrico

- Si parametrizza il vincolo G con una curva $\gamma(t)$
- Si studia l'andamento di f nella parte interna di G (th. di Fermat) se presente
- Si studia l'andamento di f sulla frontiera di G calcolando $f(\gamma(t))$ e ottimizzando questa funzione

2) Moltiplicatori di Lagrange (caso $\mathbb{R}^2$)

Date due funzioni f e $g \in C^1(A \subseteq \mathbb{R}^2)$, voglio determinare massimo e minimo di $f(x, y)$ tra tutti i punti (x, y) che soddisfano $g(x, y) = 0$

Se $\nabla g(x, y) \neq \vec{0}$ allora esiste un moltiplicatore di Lagrange λ tale che:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

È come trasformare l'ottimizzazione vincolata in una libera di una funzione $\mathcal{L}$ (funzione Lagrangiana)

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

Equazione del piano tangente.

Posso usare sia $\vec{v}$ che $\vec{n}$.

L'equazione del piano tangente a σ nel punto $P(x_0, y_0, z_0)$ è data da tutti i punti che soddisfano:

$$\underline{\vec{v}(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0}$$

Varietà k -dimensionali.

Si dice varietà k -dimensionale parametrica una funzione

$\sigma: \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, con Ω aperto tale che:

- $\sigma \in C^1(\Omega)$
- $D\sigma$ abbia rango k in Ω
↳ Jacobiana

Teorema della funzione implicita

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe $C^1(A)$ e supponiamo che in $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$

- $f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$
- $D_y f$ ha rango m ($\det(D_y f) \neq 0$)

Allora esiste un intorno U di $\vec{x}_0$ ed un'unica funzione $g: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che:

- 1) $g(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$
- 2) $f(\vec{x}', g(\vec{x}')) = \vec{0}$, $\forall \vec{x}' \in U$

Inoltre $g \in C^1(U)$ e vale $Dg(\vec{x}') = -[D_y f(\vec{x}', g(\vec{x}'))]^{-1} D_x f(\vec{x}', g(\vec{x}'))$

Teorema di Dini (funzione implicita)

Indue variabili ($\mathbb{R}^n$ con $n=2$)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in A$, se:

- I) $f \in C^1(A)$
- II) $f(x_0, y_0) = 0$
- III) $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$

Allora esiste un intorno I di x_0 e un'unica funzione $g \in C^1(I)$ tale che:

$$g: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} g(x_0) = y_0 \\ f(x, g(x)) = 0 \end{cases} \quad \text{in } I$$

$$\text{E inoltre } g'(x) = - \frac{\partial_x f(x, g(x))}{\partial_y f(x, g(x))}$$

I cui si possono invertire se $\partial_x f(x_0, y_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ esiste un intorno di (x_0, y_0) e un'unica funzione h tale che:

$$\begin{cases} h(y_0) = x_0 \\ f(h(y), y) = 0 \end{cases} \quad \text{in } I$$

$$\text{e } h'(y) = - \frac{\partial_y f(h(y), y)}{\partial_x f(h(y), y)}$$

Siccome il teorema non fornisce $g(x)$ e $h(y)$, le derivate sono utili per approssimarle con Taylor.

Il teorema si può estendere in dimensione n qualsiasi.

Interpretazione intuitiva

Sappiamo che $f(x, y) = 0$ rappresenta la curva di livello 0 della funzione f .

In alcuni casi non riusciamo a trovare esplicitamente il luogo geometrico descritto da $f(x, y) = 0$ (Es: $e^{xy} - x - 1 + y = 0$)

In questi casi possiamo limitarci a trovare qualche soluzione (nell'esempio $(x_0, y_0) = (0, 0)$).

Vorremmo sapere se vicino al punto (x_0, y_0) ci sono altre soluzioni e se queste si possono rappresentare tramite una funzione della sola variabile x ($y = g(x)$) oppure y ($x = h(y)$); ovvero vogliamo sapere se esiste una funzione g tale che $f(x, g(x)) = 0$ (oppure una funzione h tale che $f(h(y), y) = 0$) in un intorno di (x_0, y_0) .

Il teorema fornisce una condizione sufficiente affinché esista una funzione $y = g(x)$ tale che:

$$x = h(y)$$

$$f(x, g(x)) = 0$$

$$f(h(y), y) = 0$$

Funzioni a valori vettoriali e superfici

Funzioni a valori vettoriali

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$$

• $n=1$ $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ curve

• $n=2$ $\sigma: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ superficie (di solito $m=3$)

limiti $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{L} \in \mathbb{R}^m$ si calcolano componente per componente

f si dice continua in $\vec{x}_0$ se $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$ ovvero se ciascuna componente f_i è continua in $\vec{x}_0$.

f si dice differenziabile in $\vec{x}_0$ se tutte le componenti sono differenziabili in $\vec{x}_0$.

le derivate prime si possono raccogliere nella matrice Jacobiana di $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$

$$(Df)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad Df(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$i=1, \dots, m; \quad j=1, \dots, n$$

Condizione sufficiente per la differenziabilità di f in un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ tutte le derivate parziali devono essere continue su A

$f \in C^1(A) \Rightarrow f$ differenziabile in $A \Rightarrow f$ derivabile
 $\Rightarrow f$ continua

Derivazione di funzioni composte

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad g: B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \text{se:}$$

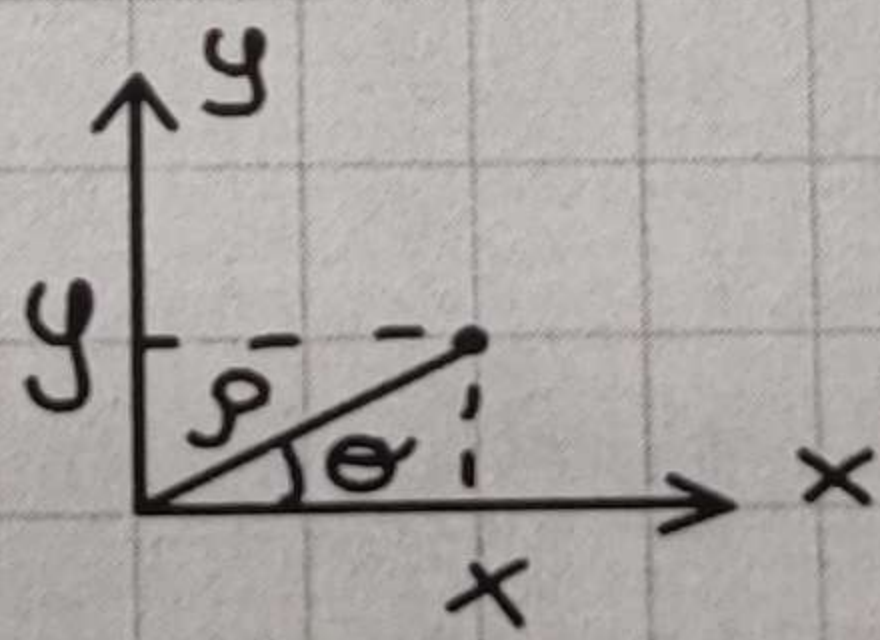
- $g \circ f$ è definita almeno in un intorno di $\vec{x}_0$
- f è differenziabile in $\vec{x}_0$
- g è differenziabile in $f(\vec{x}_0)$

$$\Rightarrow g \circ f \text{ è differenziabile in } \vec{x}_0 \text{ e } D(g \circ f)(\vec{x}_0) = Dg(f(\vec{x}_0)) Df(\vec{x}_0)$$

Trasformazioni di coordinate

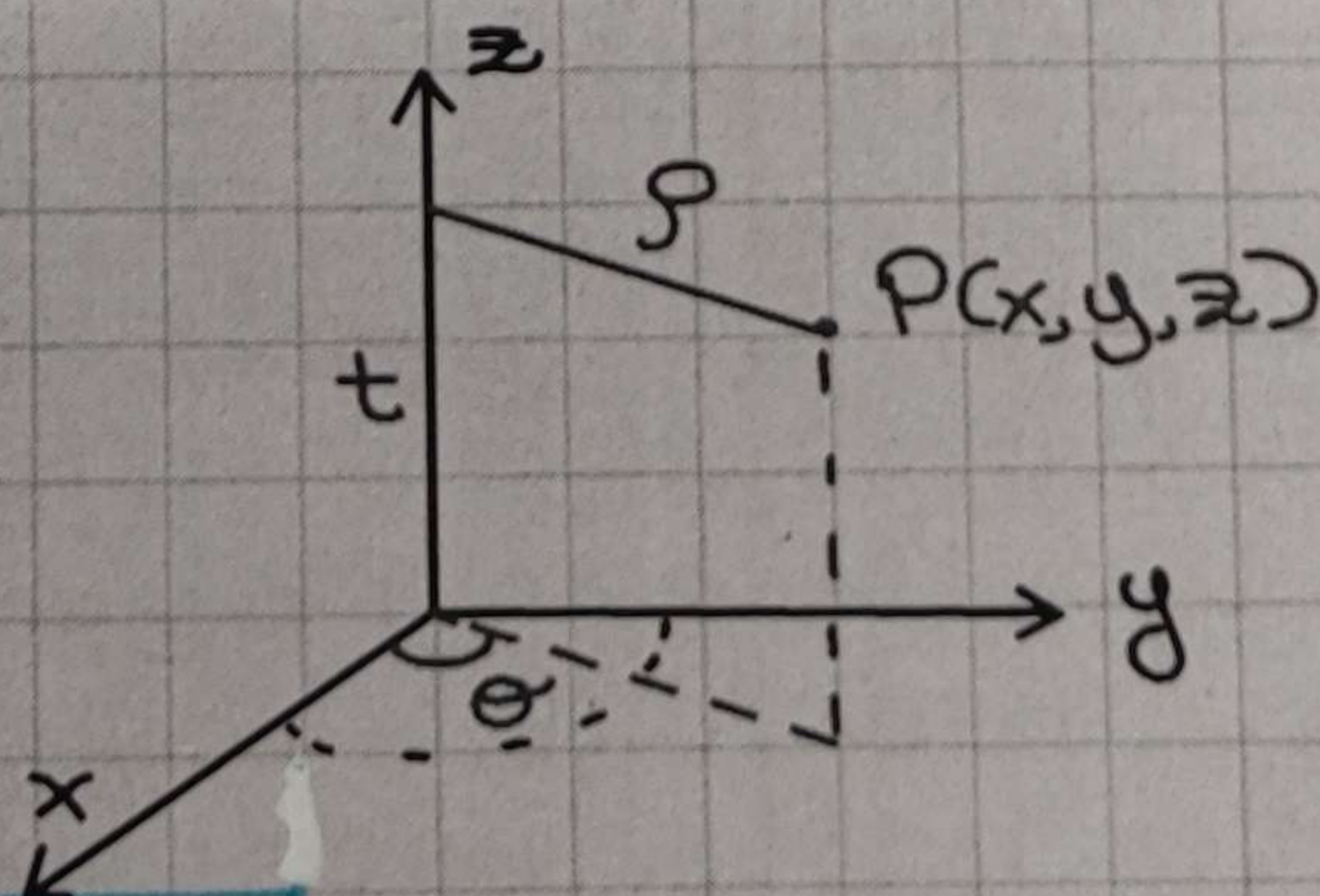
COORDINATE POLARI

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \begin{matrix} \rho \in [0, +\infty) \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$



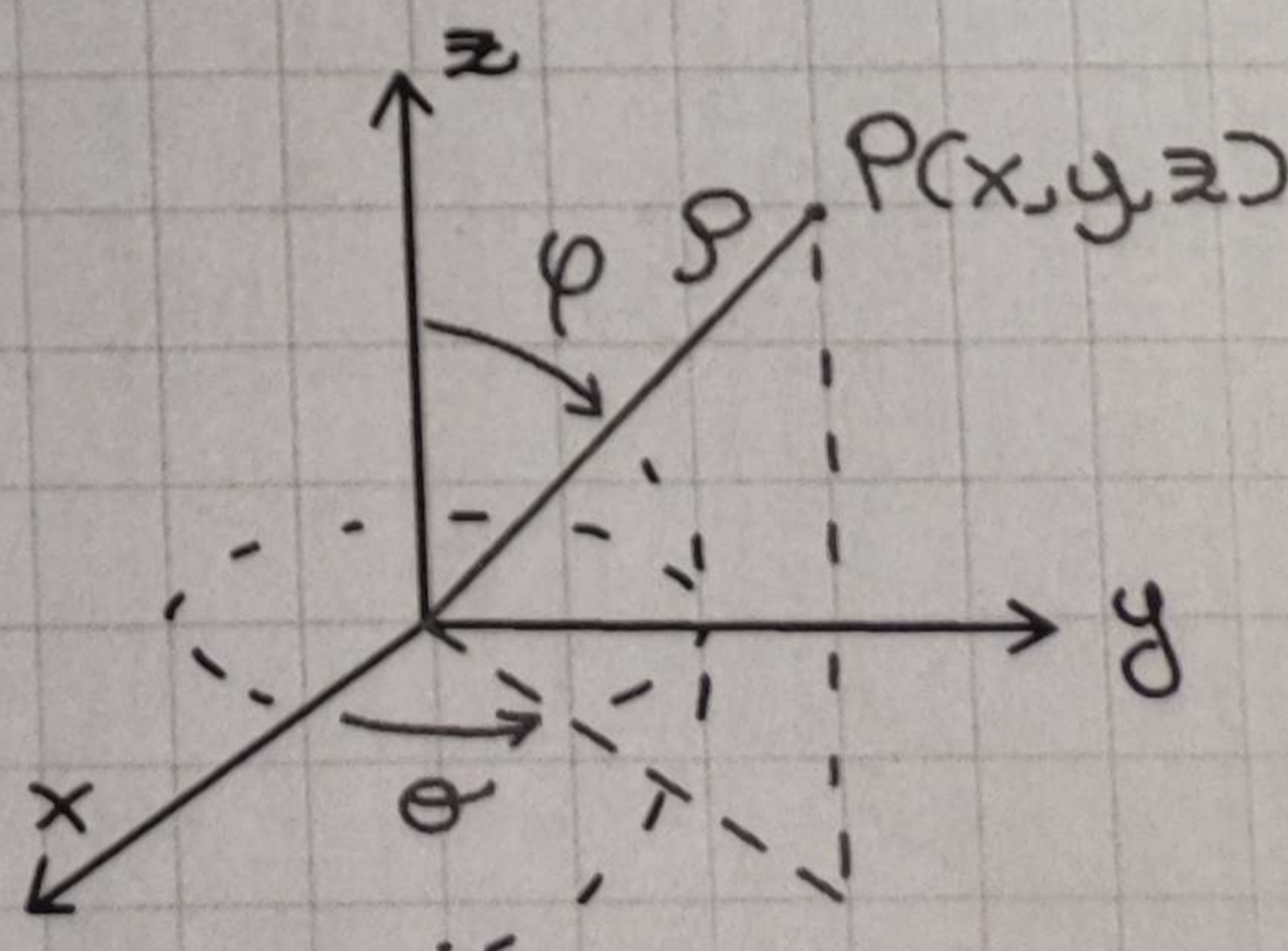
COORDINATE CILINDRICHE

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = t \end{cases} \quad \begin{matrix} \rho \in [0, +\infty) \\ \theta \in [0, 2\pi] \\ t \in \mathbb{R} \end{matrix}$$



COORDINATE SFERICHE

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{matrix} \theta \in [0, 2\pi] \\ \varphi \in [0, \pi] \\ \rho \in [0, +\infty) \end{matrix}$$



Superfici parametriche

Sono funzioni $\sigma: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

Esempio: sfera di raggio R e centro nell'origine

$$\sigma(\varphi, \theta) = \begin{cases} x = R \sin \varphi \cos \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{aligned} \theta &= [0, 2\pi] \\ \varphi &= [0, \pi] \end{aligned}$$

Def: Una superficie si dice regolare se:

- σ è differentiabile
- σ ha un unico piano tangente

↳ condizione sufficiente affinché ci sia un solo piano tangente

è che: $\text{rango}(D\sigma) = 2$

($\partial_u \sigma$ e $\partial_v \sigma$ devono essere linearmente indipendenti)

σ è differentiabile
quando tutte le
componenti sono C^1

I punti singolari di una superficie sono i punti in cui le condizioni di regolarità non sono soddisfatte.

Def: Se σ è una superficie regolare, chiamiamo vettore normale a σ il vettore:

$$\vec{v}(u,v) = \partial_u \sigma \times \partial_v \sigma$$

Si può definire il versore normale come: $\vec{n}(u,v) = \frac{\vec{v}(u,v)}{\|\vec{v}(u,v)\|}$

CASI PARTICOLARI

Superfici cartesiane: data $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, si può parametrizzare con:

$$\sigma(x,y) = (x, y, f(x,y))$$

Se σ è regolare $\Leftrightarrow$ f è differentiabile

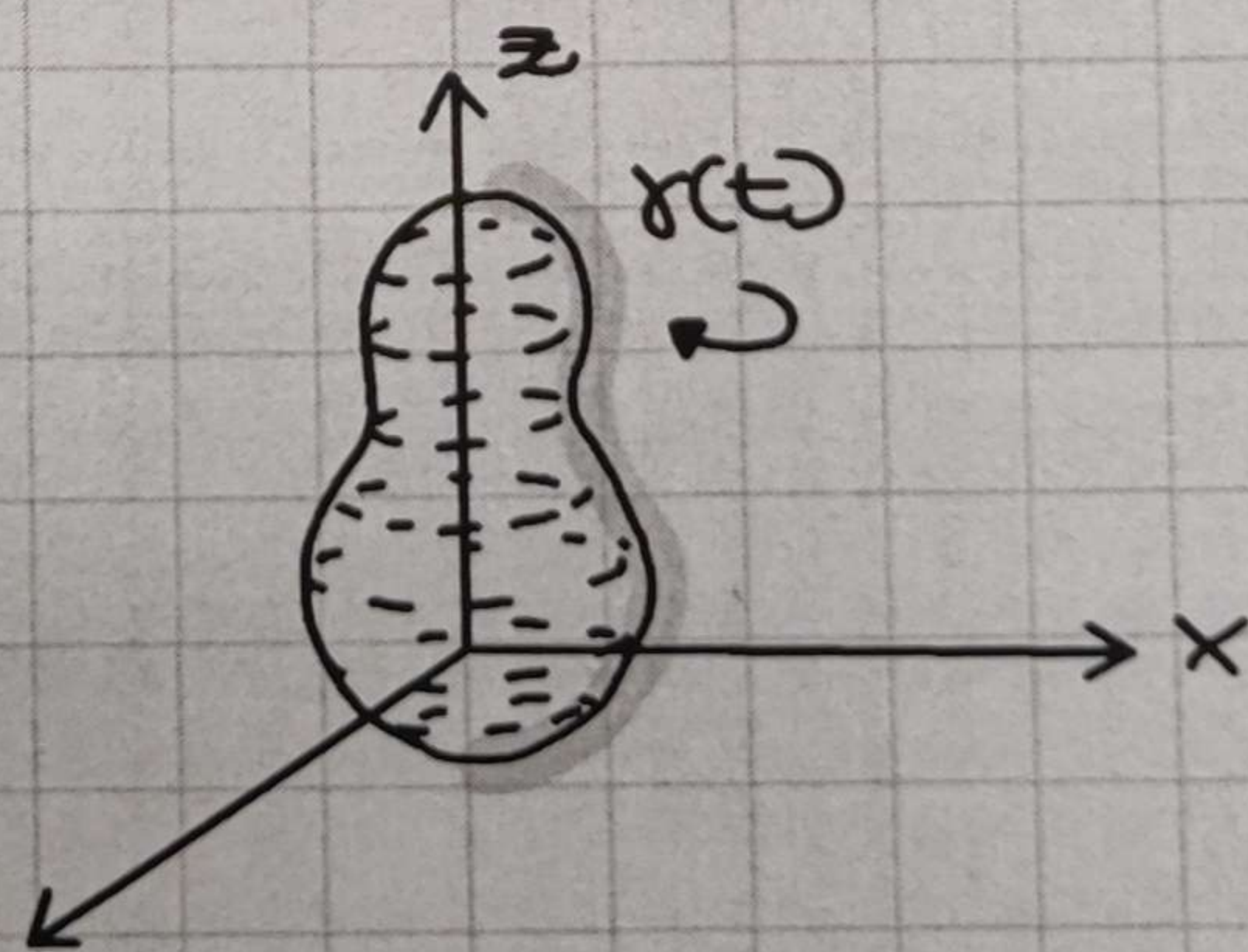
In questo caso il versore normale risulta: $\vec{n} = \frac{(-\partial_x f, -\partial_y f, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2}}$

Superfici di rotazione: superfici ottenute ruotando, attorno ad un asse, una curva generatrice

ESEMPIO: rotazione intorno ad asse z

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = 0 \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$\sigma(t, \theta) = \begin{cases} x = x(t) \cos \theta \\ y = x(t) \sin \theta \\ z = z(t) \end{cases} \quad \begin{aligned} t &\in [a,b] \\ \theta &\in [0, 2\pi] \end{aligned}$$



Se γ è regolare e se $x(t) \neq 0 \Rightarrow$ la sup. di rotazione è regolare

Esempi sup. di rotazione: cono, cilindro, sfera, paraboloidi

Misura di un insieme

Se $f=1$ costante e' integrabile su $E \subseteq \mathbb{R}^2$ (limitato) allora:

I) E e' misurabile

II) la misura dell'insieme e' $|E| = \iint_E 1 \, dx \, dy$

Simmetrie

• Se $f(x,y)$ e' pari rispetto a x ($f(-x,y) = f(x,y)$) e il dominio di integrazione e' simmetrico rispetto a $x=0$, allora:

$$\iint_D f(x,y) \, dx \, dy = 2 \iint_{D \cap x \geq 0} f(x,y) \, dx \, dy$$

• Se $f(x,y)$ e' dispari rispetto a x ($f(-x,y) = -f(x,y)$) e il dominio di integrazione e' simmetrico rispetto a $x=0$, allora:

$$\iint_D f(x,y) \, dx \, dy = 0$$

• Se $f(x,y)$ e' pari rispetto a y ($f(x,-y) = f(x,y)$) e il dominio di integrazione e' simmetrico rispetto a $y=0$, allora:

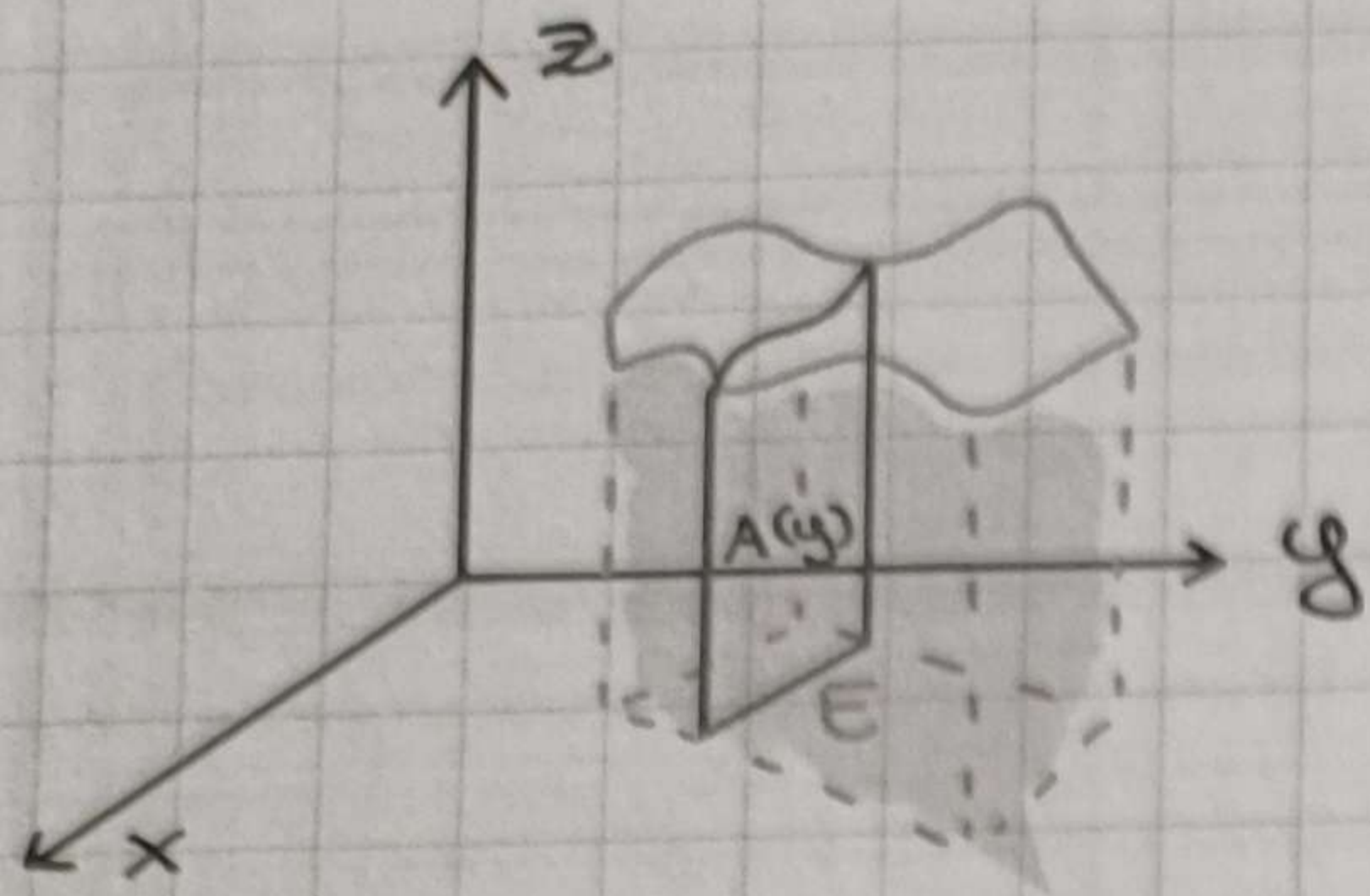
$$\iint_D f(x,y) \, dx \, dy = 2 \iint_{D \cap y \geq 0} f(x,y) \, dx \, dy$$

• Se $f(x,y)$ e' dispari rispetto a y ($f(x,-y) = -f(x,y)$) e il dominio di integrazione e' simmetrico rispetto a $y=0$, allora:

$$\iint_D f(x,y) \, dx \, dy = 0$$

Integrali doppi

IDEA: calcolo del volume sottostante a una funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$



$$f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ limitata}$$

Domini rettangolari

Il dominio E è un rettangolo $E = [a, b] \times [c, d]$

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \int_c^d A(y) dy \quad \text{con } A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

$$\text{In generale: } \iint_E f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

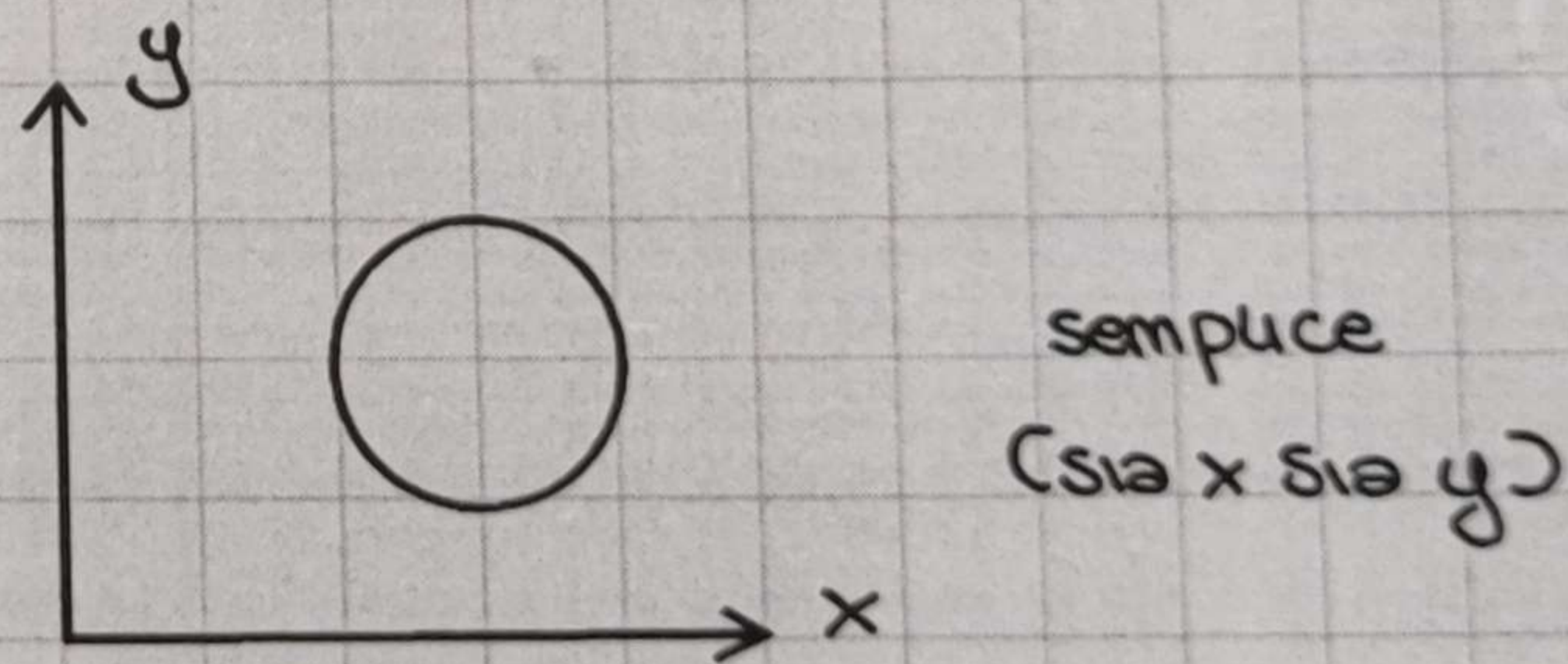
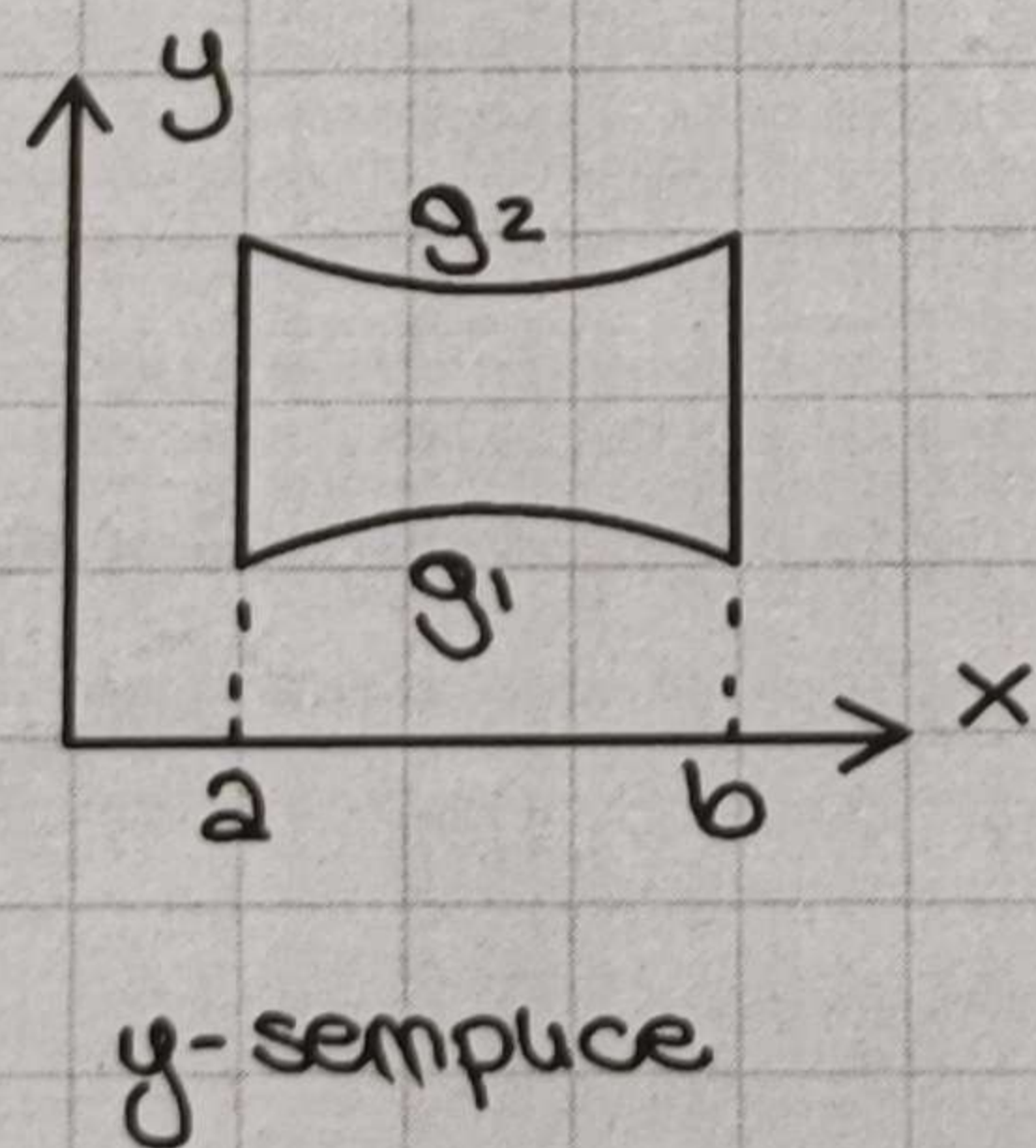
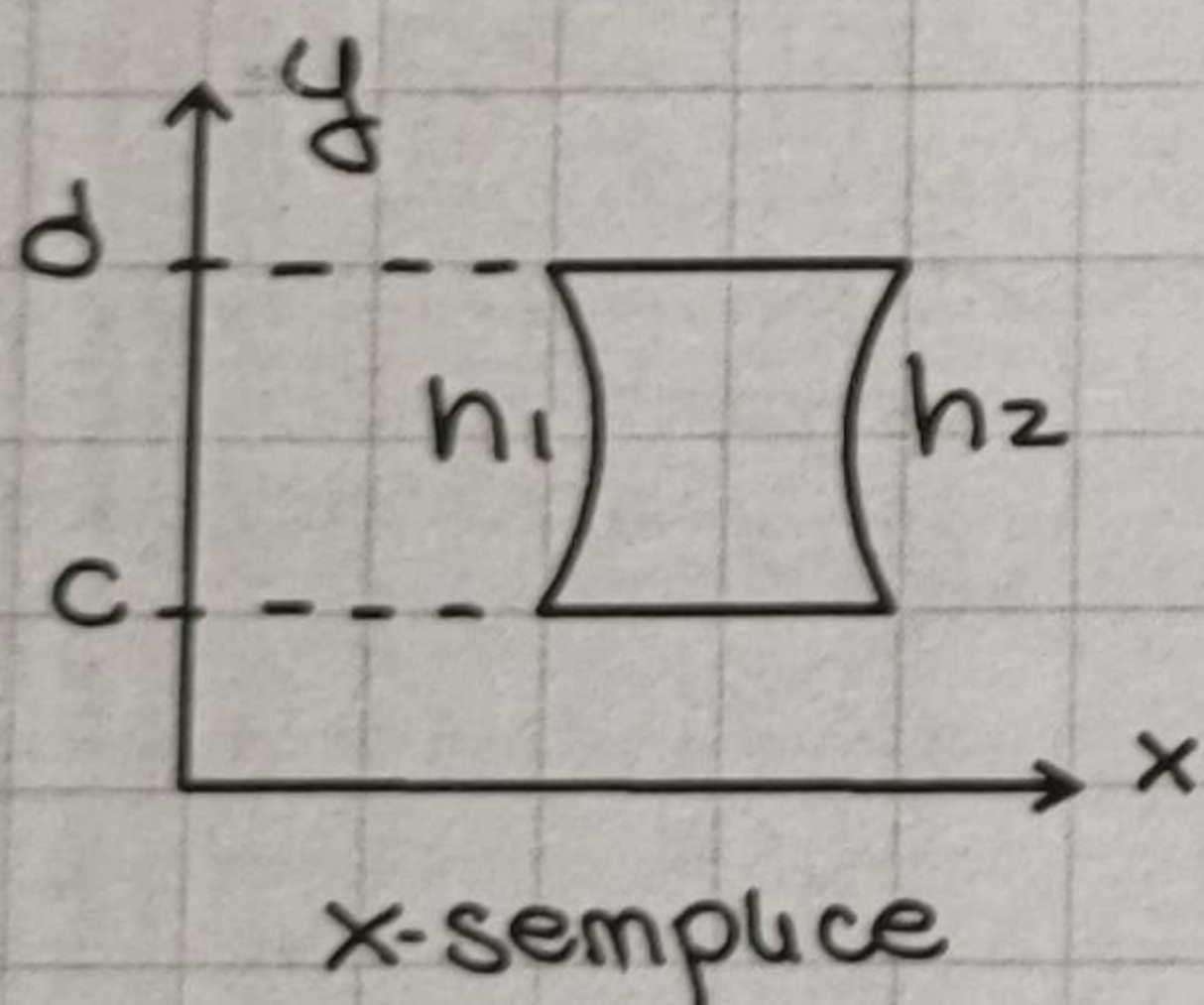
Funzioni a variabili separabili

Se f è esprimibile come prodotto di due funzioni $g(x)$ e $h(y)$: $\iint_E f(x, y) dx dy = \int_a^b g(x) dx \cdot \int_c^d h(y) dy$

Domini non rettangolari

Classificazione:

- E si dice x-semplce se è nella forma $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$
- E si dice y-semplce se è nella forma $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$
- E si dice regolare se è unione finita di insiemi semplici.



Esempio con E y-semplce: $\iint_E f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$

Cambio di variabili

Se voglio passare ad un altro sistema di coordinate (polari, cilindriche, ...) non basta sostituire alla funzione integranda l'espressione delle nuove variabili, ma bisogna anche trovare a cosa corrisponde $dx dy$ nelle nuove coordinate.

$\Rightarrow$ Si usa il determinante della Jacobiana, data $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) = T(u, v) \Rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{T^{-1}(D)} f(u, v) |\det(DT(u, v))| du dv$$

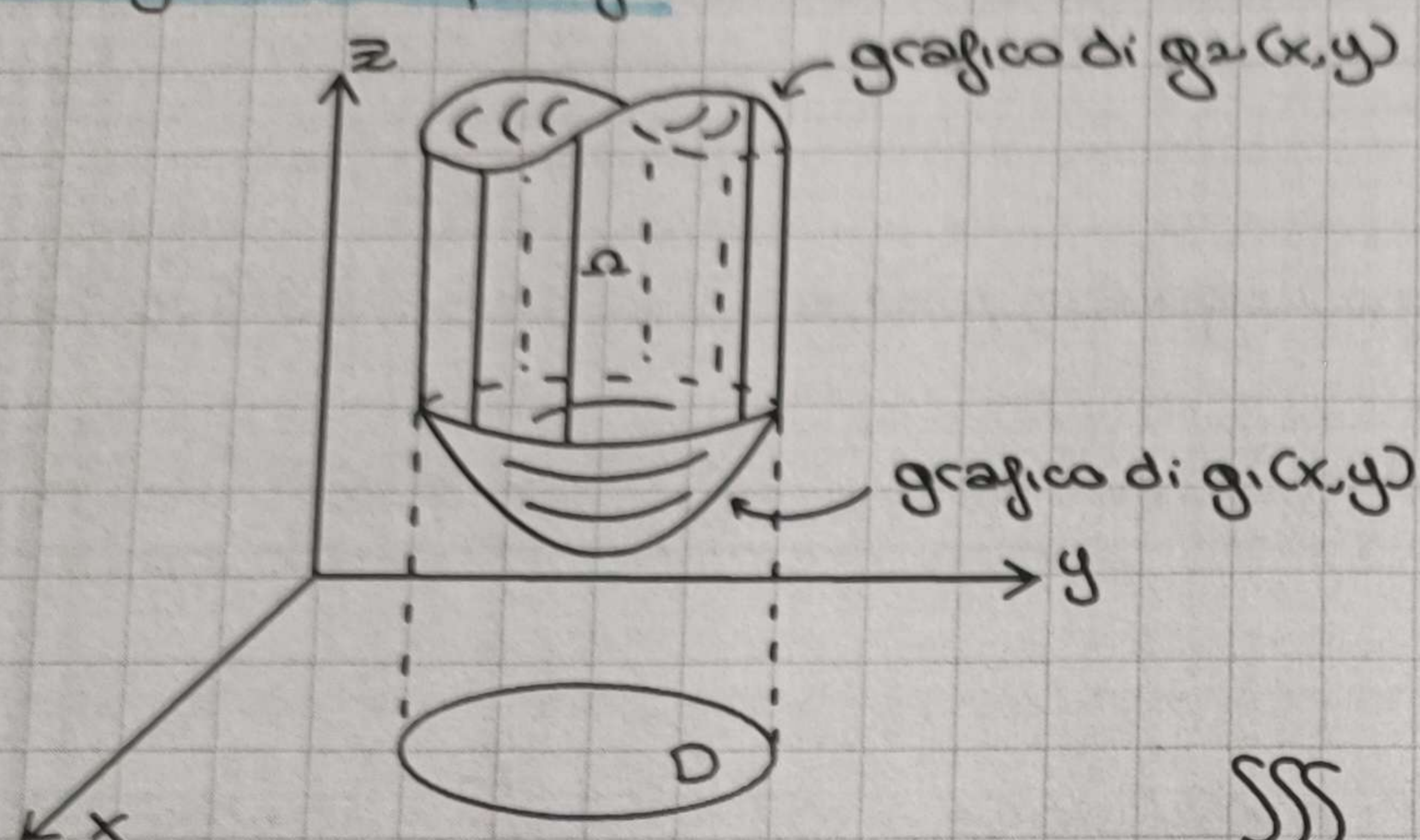
In 2D, da ricordare per coordinate polari: $dx dy = \rho d\rho d\theta$

Integrali Tripli

Sono integrali del tipo: $\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Come si calcolano? $\rightarrow$ cambio di variabili (come visto per integrali doppi)
 $\rightarrow$ formule di riduzione (piu' astratti)

Integrazione per fili



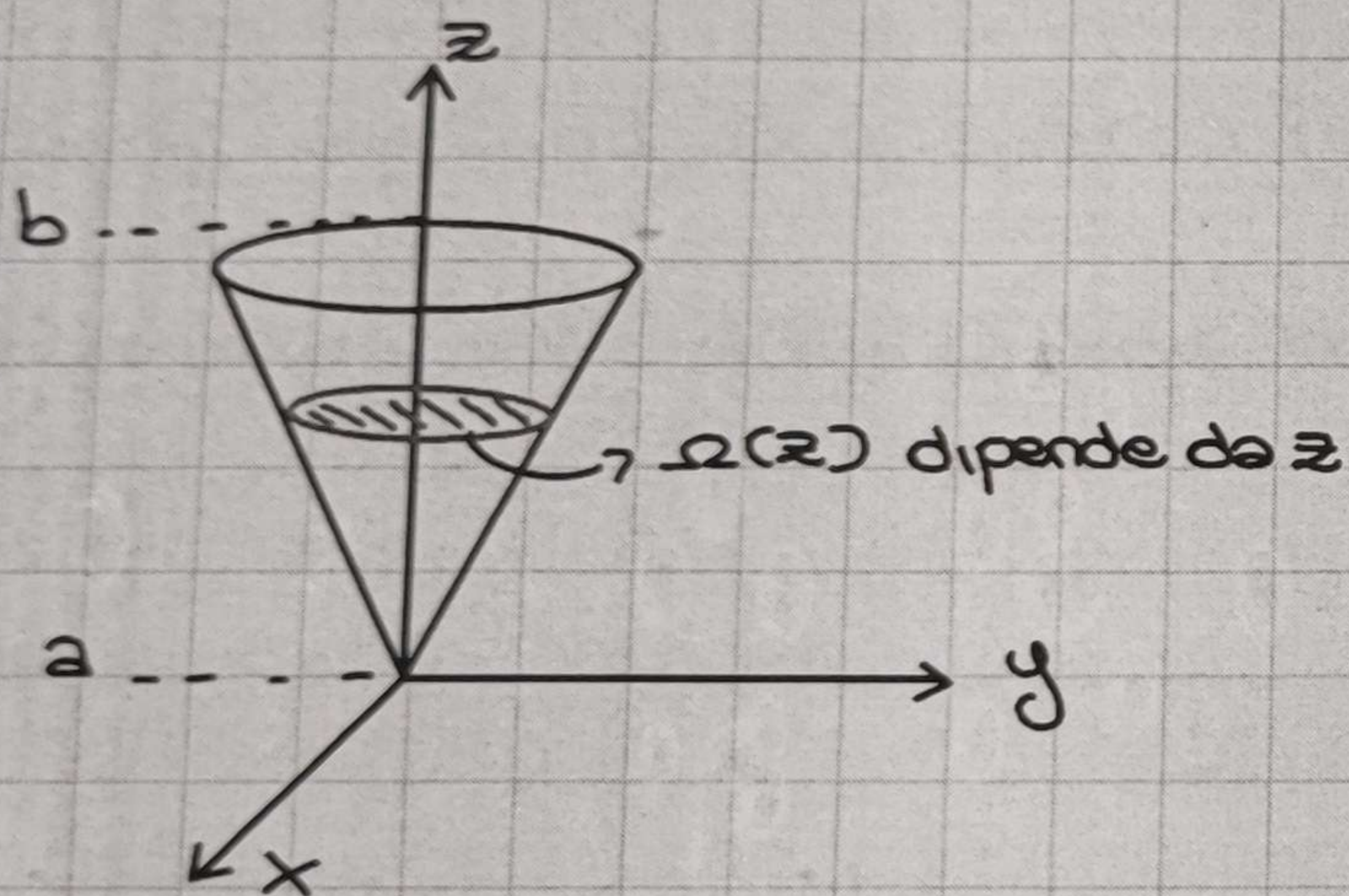
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare

$g_1, g_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{g_1}^{g_2} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

Integrazione per strati



$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [a, b], (x, y) \in \Omega(z)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{\Omega(z)} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

Ad ogni z fissata ho una "fetta"

Cambio di variabili

Anche in questo caso la trasformazione di $dx dy dz$ dipende dal determinante della Jacobiana della trasformazione.

Importanti da ricordare:

• coordinate sferiche $dx dy dz = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

• coordinate cilindriche $dx dy dz = \rho d\rho d\theta dz$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Campi Vettoriali

Sono funzioni $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ad ogni punto dello spazio associano un vettore

Def: Dato un campo vettoriale $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con A aperto e connesso, $f \in C^1(A)$, chiamiamo linea di campo di f una curva regolare, tangente ad f in ogni punto di A .

Come si trovano le linee di campo? Condizione di parallelismo tra $r'(t)$ e $f(r(t))$
 $r: I \rightarrow \mathbb{R}^n \implies r'(t) \parallel f(r(t))$

Operatori differenziali

Dati $\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, A aperto e connesso, $f \in C^1(A)$

Rotore di f

Il campo rot $\vec{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^3$, di classe $C^0(A)$ è dato da:

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = (\partial_y f_3 - \partial_z f_2; \partial_z f_1 - \partial_x f_3; \partial_x f_2 - \partial_y f_1)$$

Se $\vec{\nabla} \times \vec{f} = \vec{0}$ il campo si dice irrotazionale

Divergenza di f

La funzione $\text{div } \vec{f}$ è una funzione scalare $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3$$

Se $\text{div } \vec{f} = 0$ il campo si dice solenoidale.

Gli operatori gradiente, divergenza e rotore si possono combinare tra loro.
 Ω aperto, regolare in $\mathbb{R}^3$

$$C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{GRAD}} C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{ROT}} C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{DIV}} C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$$

Due passi nello schema danno risultato zero:

- $\text{rot}(\text{grad } \vec{f}) = \vec{0}$
- $\text{div}(\text{rot } \vec{f}) = 0$

Alcuni non hanno senso

- $\text{rot}(\text{div } \vec{f}) = ??$ perché $\text{div } \vec{f}$ non è un vettore
- $\text{grad}(\text{rot } \vec{f}) = ??$ perché $\text{rot } \vec{f}$ non è scalare

Laplaciano di f

$$\text{div}(\text{grad } \vec{f}) = \Delta f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f$$

lavoro di un campo

Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti; sia $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo di classe $C^0(A)$

Il lavoro di F lungo γ è:

$$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} F \cdot T dt \quad \text{con } T = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$$

↳ prod. scalare

Se γ è semplice e chiusa, l'integrale viene detto circolazione del campo $\oint_{\gamma} F \cdot d\gamma$
L'integrale è invariante per cambi di parametrizzazione equivalenti, ma cambia segno
per cambi di orientazione.

Campi conservativi e potenziali

Un campo $F \in C^1(A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3)$ è conservativo se esiste una funzione $U: A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^2(A)$

tale che: $\nabla U = F$

La funzione U si dice potenziale di F

L'opposto di U , ovvero $-U$, si dice energia potenziale associata al campo F

Se F è conservativo in A e $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ è regolare a tratti allora il lavoro risulta:

$$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

Se γ è semplice e chiusa, l'integrale vale zero.

I seguenti enunciati sono equivalenti:

a) Per ogni coppia di curve regolari con punti di partenza e arrivo uguali: $\int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma = \int_{\gamma_2} F \cdot d\gamma$

b) Per ogni curva chiusa, semplice e regolare $\oint_{\gamma} F \cdot d\gamma = 0$

c) F è conservativo

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} \gamma(t) \quad \text{velocità vettoriale}$$

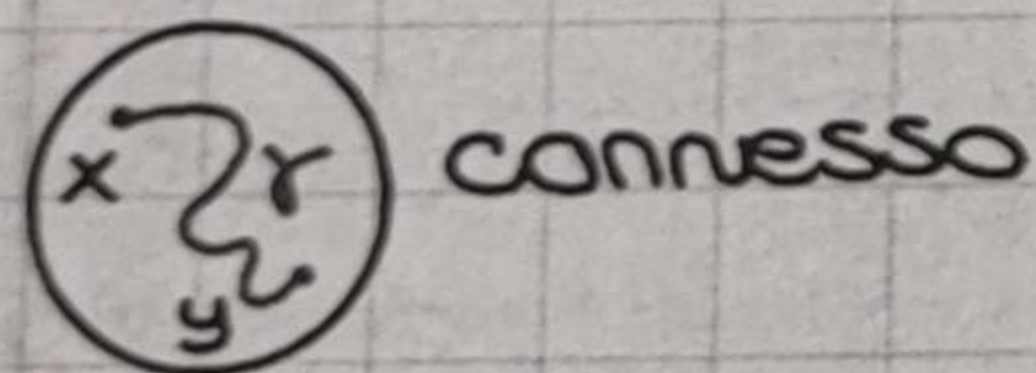
$$v(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| \quad \text{velocità scalare}$$

Insiemi connessi e semplicemente connessi

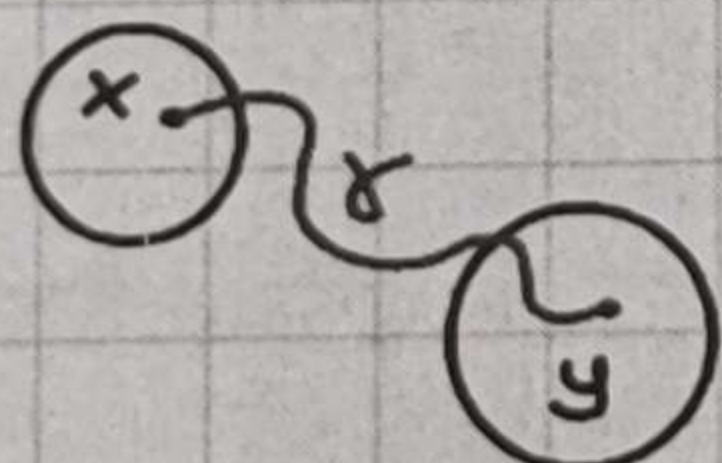
Def: Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice connesso (per archi) se:

$\forall x, y \in A$, esiste una curva continua $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$ tale che

$$\begin{cases} \gamma(0) = x & \gamma(t) \in A \\ \gamma(1) = y & \forall t \in [0, 1] \end{cases}$$



connesso



non connesso

Se A è connesso e U, V sono due potenziali di $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3 \Rightarrow U - V$ è costante

Def: Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice semplicemente connesso se:

• è connesso

• per ogni curva continua, chiusa, semplice, contenuta in Ω , si può contrarre in modo continuo punto a punto, senza uscire da Ω

Esempi di insiemi semplicemente connessi

$\mathbb{R}^2$

Sì

cerchi, ellissi,

poligoni, semipiani

$\mathbb{R}^2$ stesso

$\mathbb{R}^2$ privato di una semiretta

No

$\mathbb{R}^2 \setminus \{P(x_0, y_0)\}$

cerchi e poligoni
privati di un punto

corone circolari

$\mathbb{R}^2$ privato di una
retta (non è connesso)

circonferenza

$\mathbb{R}^3$

Sì

sfere, ellipsoidi

corona sferica

Sup. sferica

$\mathbb{R}^3 \setminus \{P(x_0, y_0, z_0)\}$

No

toro, sfera privata
di un diametro

$\mathbb{R}^3$ privato di una retta

$\mathbb{R}^3$ privato di un piano
(non è connesso)

Teorema

Se $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e:

$$\cdot \nabla \times \vec{F} = \vec{0}$$

• Ω è semplicemente connesso

} $\Rightarrow F$ è conservativo in Ω

Se Ω non è semplicemente connesso, non si può concludere nulla

$\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ è una condizione necessaria affinché F sia conservativo (ma non suff.)

Se $\nabla \times \vec{F} \neq \vec{0}$ F non è conservativo.

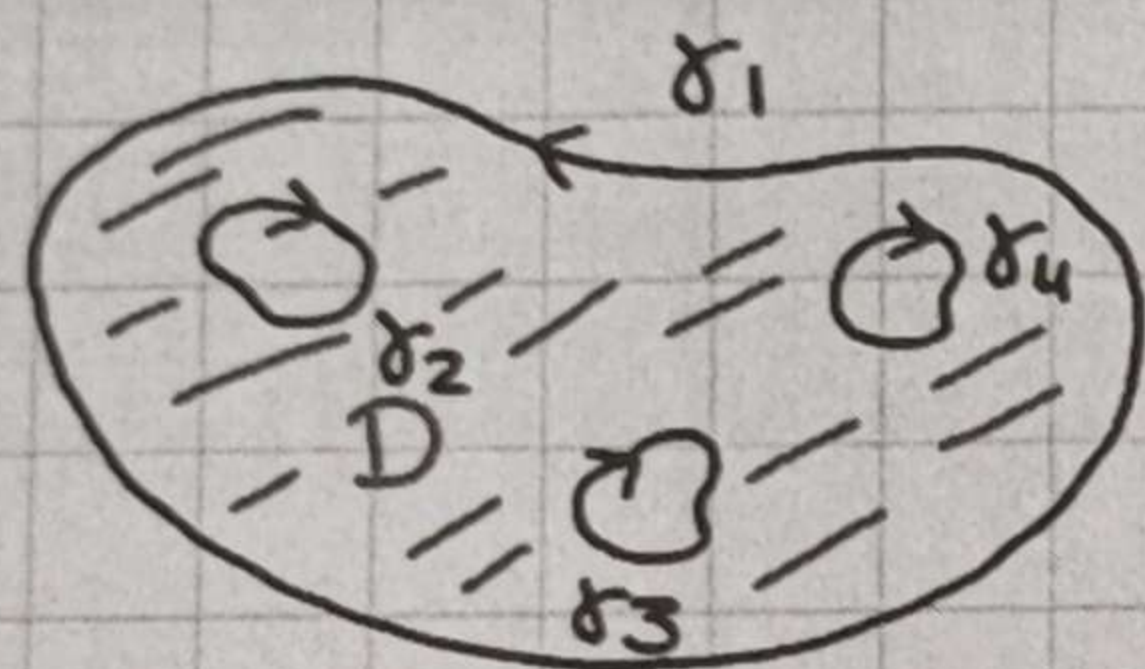
In $\mathbb{R}^2$ si può verificare se $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ utilizzando le derivate incrociate

$$\vec{F}(F_1, F_2) \rightsquigarrow \nabla \times \vec{F} = \vec{0} \iff \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Una volta verificate le condizioni, si calcola il potenziale: $\nabla U = F \iff \frac{\partial U}{\partial x_i} = f_i$

Def: Dato un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare, la frontiera di D (∂D) è orientata positivamente se camminando lungo ∂D vedo l'insieme D a sinistra.

NOTAZIONE: $\partial^+ D$



ORIENTAZIONE POSITIVA

- γ_1 senso antiorario

- $\gamma_2, 3, 4$ senso orario

Formula di Gauss - Green

Sia D decomponibile in unione finita di insiemi x e y -semplici, $D \subseteq \mathbb{R}^2$

Sia $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $D \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, di classe $C^1(\Omega)$

$$\hookrightarrow F = (F_1; F_2)$$

$$\text{rot} F = (0; 0; \partial_x F_2 - \partial_y F_1)$$

$$\text{Allora: } \iint_D \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \, dx \, dy = \int_{\partial^+ D} F \cdot d\vec{r}$$

Applicazioni della formula

- calcolo di lavori:

- calcolo di aree: posso calcolare l'area di D tramite un integrale curvilineo

se trovo un campo F tale che $\partial_x F_2 - \partial_y F_1 = 1$

$$\Rightarrow \iint_D 1 \, dx \, dy = \int_{\partial^+ D} F \cdot d\vec{r} = |D|$$

Es: $F(x, y) = (0, x)$ oppure $F(x, y) = (-y, 1)$

oppure $F(x, y) = (-\frac{y}{2}, \frac{x}{2})$

$\hookrightarrow$ lavoro uguale
all'area della superficie

Integrali di Superficie

Sia Σ una superficie nello spazio xyz , parametrizzata attraverso la funzione

$$\sigma: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

σ è definita sull'insieme D del piano uv

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Sigma \subseteq A$

l'integrale di superficie di f su Σ è dato da: $\iint_{\Sigma} f dS = \iint_D f(\sigma(u,v)) |\partial_u \sigma \times \partial_v \sigma| du dv$

Un caso particolare si ha quando $f(x,y,z) = 1$, è possibile calcolare l'area della superficie:

$$\text{Area}(\Sigma) = |\Sigma| = \iint_{\Sigma} 1 dS = \iint_D |\partial_u \sigma \times \partial_v \sigma| du dv$$

Da ricordare:

- Superfici cartesiane: $\sigma(u,v) = (u, v, f(u,v))$ $|\partial_u \sigma \times \partial_v \sigma| = \sqrt{1 + |f'|^2}$
- Superfici di rotazione: $\sigma(t, \theta) = (x(t)\cos\theta, x(t)\sin\theta, z(t))$ $|\partial_t \sigma \times \partial_\theta \sigma| = |x| \cdot |x'|$

Se Σ è una sup. di rotazione, dato il baricentro $\bar{x}$, l'area di Σ è:

$$|\Sigma| = 2\pi \cdot \bar{x} \cdot L$$

L > lunghezza

Flusso di campo vettoriale

Def: Sia Σ una superficie parametrica regolare parametrizzata da $\sigma(u,v)$

il vettore normale ad essa è dato da: $\vec{n}' = \frac{\partial_u \sigma \times \partial_v \sigma}{|\partial_u \sigma \times \partial_v \sigma|}$

Una superficie è orientabile se esiste una scelta continua di $\vec{n}'$ su tutta Σ .

$$\hookrightarrow \sigma: D \rightarrow \Sigma$$

Dato un campo vettoriale F e una superficie regolare Σ orientata con $\vec{n}'$

Si definisce flusso di F attraverso Σ :

$$\phi_{\Sigma}(F) = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}' dS = \iint_D F(\sigma(u,v)) \cdot (\partial_u \sigma \times \partial_v \sigma) du dv$$

Teorema della divergenza

$\hookrightarrow$ frontiera

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^3$, limitato, $x-y-z$ semplice, tale che ∂D è una superficie regolare a pezzi, orientabile.

Sia $\vec{n}$ il vettore normale uscente da ∂D e sia $F \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$, allora:

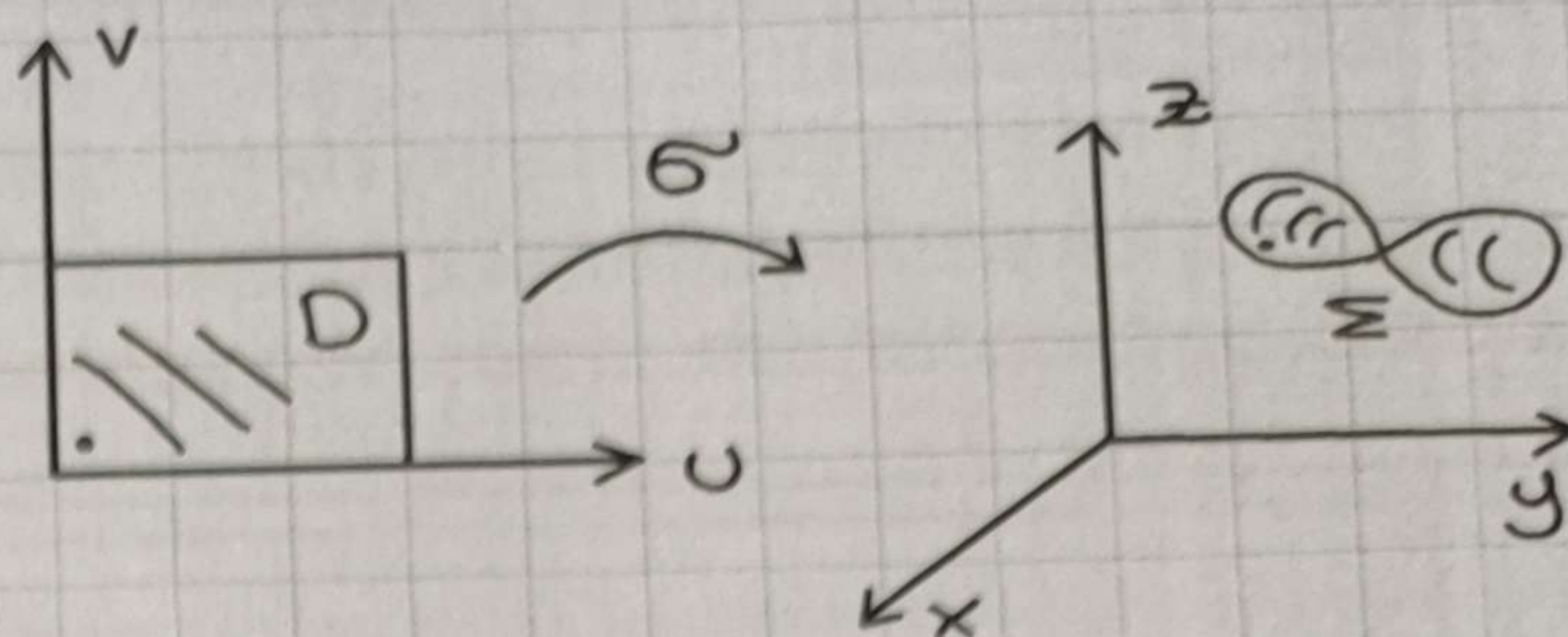
$$\iiint_D \text{div } \vec{F} dx dy dz = \iint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

Def: Il bordo di una superficie è una curva (insieme di curve) che delimita i punti di Σ .

Notazione: $\partial \Sigma$ (Da non confondere con la frontiera).

Per una superficie $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare, orientabile, orientata con $\vec{n}'$.

$\partial \Sigma$ è orientato positivamente ($\partial^+ \Sigma$) se $\vec{n}'$, camminando lungo $\partial \Sigma$, vede Σ a sinistra.



Teorema del rotore (di Stokes)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto, $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 .

Sia Σ una superficie regolare, orientata con $\vec{n}$, con bordo $\partial\Sigma$ dato dall'unione di curve regolari.

Auora:

$$\iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \rightarrow \text{circolazione}$$

L, FLUSSO del rotore

Se Σ è chiusa, allora l'integrale vale zero.

Se $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^2$ e il campo F è piano, $F = (F_1(x,y), F_2(x,y), 0)$

allora il teorema di Stokes coincide con il teorema di Gauss-Green.

FLUSSO del rotore di
determinato compi
attraverso sup.
regolari dotate di
bordo e' uguale alla
circolazione del
campo lungo la
frontiera