



Esercizi Biomeccanica

Biomeccanica E Simulazione Di Dispositivi Biomedici (Università degli Studi di Pavia)



Scansiona per aprire su Studocu

QUADERNO DEGLI ESERCIZI

8 marzo 2021

ESERCIZIO 1: Trovare il significato e confrontare con le slides i concetti: biomeccanica, simulazione numerica, dispositivi biomedicali.

Biomeccanica

Slides	Studio della meccanica applicata alla biologia.
Wikipedia	Applicazione dei principi della meccanica agli organismi viventi; in particolare, la biomeccanica analizza il comportamento delle strutture fisiologiche quando sono sottoposte a sollecitazioni statiche o dinamiche.

Simulazione numerica

Slides	Implementazione di modelli matematici che descrivono un sistema fisico.
Wikipedia	Modello della realtà che consente di valutare e prevedere lo svolgersi dinamico di una serie di eventi o processi susseguenti all'imposizione di certe condizioni da parte dell'analista. Si tratta di uno strumento sperimentale di analisi molto potente, utilizzato in molti ambiti scientifici e tecnologici dettato dalla difficoltà o impossibilità di riprodurre fisicamente in laboratorio le effettive reali condizioni da studiare e che si avvale delle grandi possibilità di calcolo offerte dai grandi sistemi di elaborazione informatici.
Treccani	La modellistica matematica mira a descrivere in termini matematici i molteplici aspetti del mondo reale e la loro dinamica evolutiva.

Dispositivi biomedicali

Slides	Qualsiasi dispositivo usato per scopi medici. Interagiscono con pazienti quindi forniscono diagnosi, trattamenti, cure.
Wikipedia	Strumento utilizzato in medicina per finalità diagnostiche e/o terapeutiche.

ESERCIZIO 2: Adottare un medico e chiedere se conosce qualche problema di biomeccanica.

Ho preso contatto con un chirurgo ortopedico, il quale mi ha riferito che sono molteplici i problemi di biomeccanica in ortopedia. Mi ha fatto una panoramica degli interventi che esegue generalmente e delle problematiche che affronta.

Ad esempio, mi ha raccontato che quando sintetizza una frattura delle ossa lunghe esistono due modalità:

1. chiodo endomidollare, che viene fissato con delle viti per evitare le rotazioni delle parti di osso;
2. placca, che viene appoggiata sull'osso e fissata con delle viti.

In entrambi i casi è necessario raggiungere un allineamento e una rotazione corretta dei monconi di frattura.

In generale, di fronte a una frattura, esiste sempre un problema di tipo biomeccanico che è in relazione alla geometria di frattura e alle caratteristiche del paziente come peso, altezza, età, qualità dell'osso, ecc.

Ad esempio, nelle placche è a discrezione del chirurgo decidere la lunghezza di quest'ultima, il numero di viti da applicare e la distanza tra queste al fine di poter precocemente mobilizzare il paziente.

Nel caso del chiodo endomidollare, è il chirurgo a stabilire la sua lunghezza, il calibro, il punto di applicazione, l'angolo di entrata, ecc.

Quando c'è una doppia opzione di trattamento - quindi chiodo endomidollare o placca con viti - la scelta dipende sicuramente dall'esperienza del chirurgo ma soprattutto esistono dei protocolli per cui ad ogni geometria di frattura corrisponde un trattamento di preferenza. Esiste proprio un'organizzazione chiamata AO Foundation che mette a disposizione una classificazione molto dettagliata di tutte le fratture del corpo umano e mostra il trattamento preferibile per ogni tipo di frattura.

Per quanto riguarda i materiali:

- i chiodi possono essere rivestiti da un materiale che ha un'azione antibatterica e quindi che riduce il rischio di infezione;
- le placche possono essere in acciaio o in titanio. Solitamente quest'ultimo materiale è preferibile anche se ora esistono protesi in acciaio che sono RMN-compatibili, che quindi non interferiscono con i campi magnetici durante le risonanze.

ESERCIZIO 3: Cercare cosa sono i materiali elencati nella slide (polymers, metals, alloys, aluminum, cobalt, copper, lead, magnesium, nickel, steel, superalloys, titanium, zinc alloys, ceramics), elencare 4 materiali biologici.

polymer (polimero): macromolecola, ovvero molecola con elevato peso molecolare, costituita da un gran numero di gruppi molecolari uniti a catena mediante la ripetizione dello stesso tipo di legame.

metal (metallo): materiale conduttore di calore ed elettricità, capace di riflettere la luce.

alloy (lega): combinazione in soluzione o in miscela di due o più elementi di cui almeno uno è un metallo e il cui materiale risultante ha proprietà metalliche differenti da quelle dei relativi componenti

aluminum (alluminio): elemento chimico della tavola periodica degli elementi e con numero atomico 13. Il suo simbolo è Al ed è un metallo duttile color argento.

cobalt (cobalto): elemento chimico di numero atomico 27 e il suo simbolo è Co. È un elemento bianco-argenteo, ferromagnetico e molto duro.

copper (rame): elemento chimico di numero atomico 29 e il suo simbolo è Cu. È anche chiamato "oro rosso" per via della sua colorazione. Il rame è un metallo rosato o rossastro, di conducibilità elettrica e termica elevatissima, è molto resistente alla corrosione e non è magnetico. È facilmente lavorabile, estremamente duttile e malleabile.

lead (piombo): elemento chimico di numero atomico 82 e il suo simbolo è Pb. È un metallo tenero, denso, duttile e malleabile.

magnesium (magnesio): elemento chimico della tavola periodica degli elementi che ha come simbolo Mg e come numero atomico 12. In natura, per la sua elevata reattività, non esiste allo stato libero, ma si trova combinato con altri elementi. È un metallo leggero, di colore bianco argento e abbastanza duro.

nickel (nichel): elemento chimico di numero atomico 28 e il suo simbolo è Ni. È duro, malleabile e duttile.

steel (acciaio): lega ferrosa composta principalmente da ferro e carbonio, quest'ultimo in percentuale non superiore al 2,06%; oltre tale limite, le proprietà del materiale cambiano e la lega assume la denominazione di ghisa.

superalloys (superleghe): categoria di leghe metalliche molto ampia, progettate per conservare una buona resistenza meccanica ed alla corrosione anche a temperature intorno ai 1200 gradi °C.

titanium (titanio): elemento chimico della tavola periodica degli elementi che ha come simbolo Ti e come numero atomico 22. È un metallo del blocco d, leggero, resistente, di colore bianco metallico, lucido, resistente alla corrosione.

zinc (zinco): elemento chimico di numero atomico 30 e il suo simbolo è Zn. È solido a temperatura ambiente. È un metallo moderatamente reattivo, che si combina con l'ossigeno e altri non metalli.

ceramic (ceramica): materiale inorganico, non metallico, molto duttile allo stato naturale, rigido dopo la fase di cottura.

smart material (materiale intelligente): materiali dotati di una o più proprietà che possono essere cambiate e controllate tramite degli stimoli esterni, come l'azione esterna, la temperatura, l'umidità, il pH, il campo elettrico o magnetico.

shape-memory alloy (lega a memoria di forma): lega metallica che "mantiene la memoria" della sua forma, riacquisendola quando viene surriscaldata.

shape-memory polymer (polimero a memoria di forma): materiale intelligente polimerico che ha la capacità di ritornare da uno stato deformato (forma temporanea, metastabile) alla sua forma originale (permanente, stabile) a seguito di uno stimolo esterno (o innesco), come ad esempio un cambiamento di temperatura.

biological material (materiale biologico): un materiale si dice biologico per due motivi:

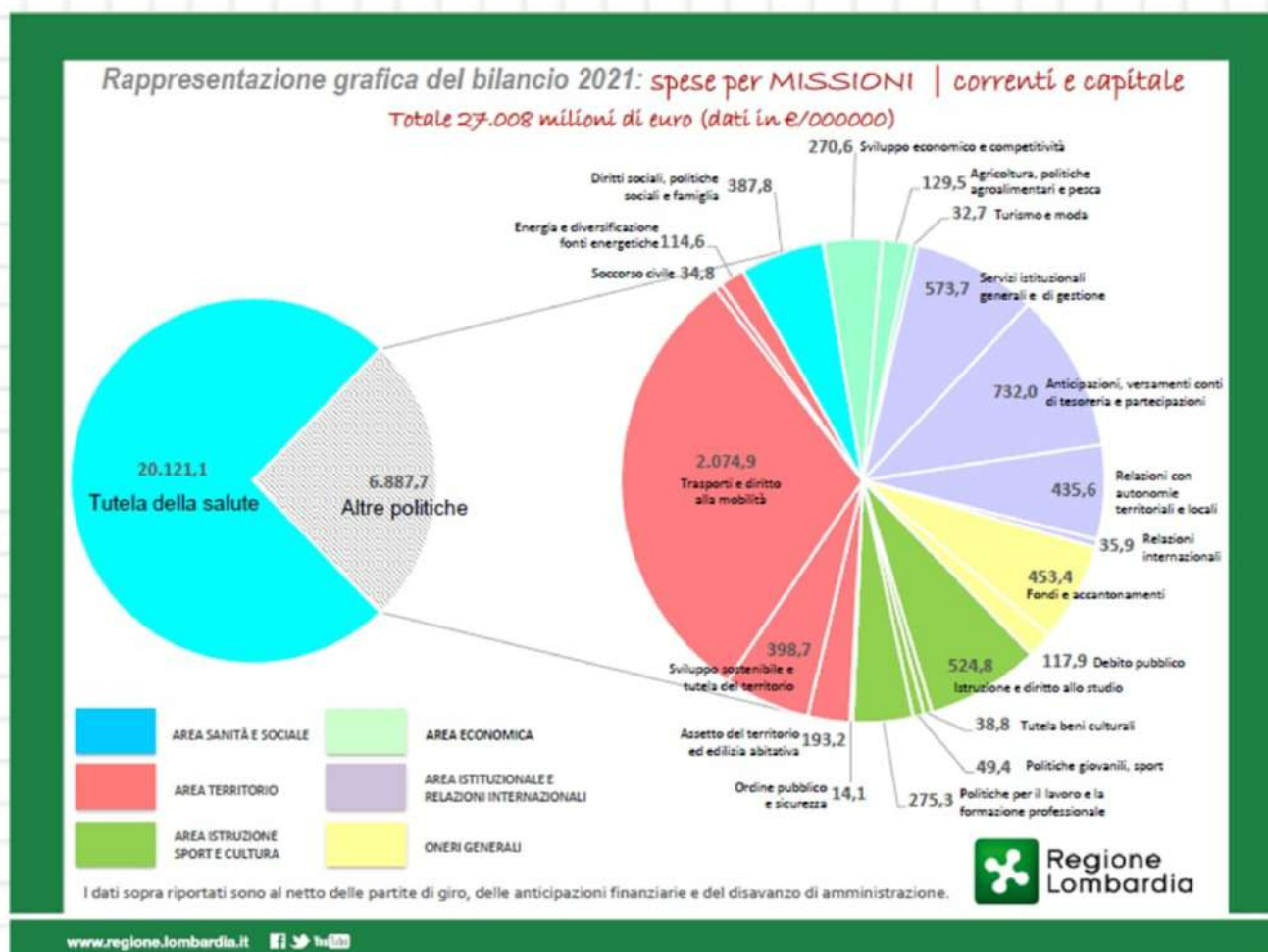
1. perché è "amico" degli esseri viventi, quindi non è dannoso per questi ultimi;
2. perché deriva dagli esseri viventi, quindi le materie prime di cui è costituito derivano da organismi viventi.

Esempi di materiali biologici sono:

- parti del corpo come pelle, ossa, arterie, capelli, tendini, etc
- acciaio inox,
- titanio,
- cromo-cobalto.

ESERCIZIO 4: Verificare il budget della sanità in Lombardia e la percentuale spesa in sanità rispetto al totale.

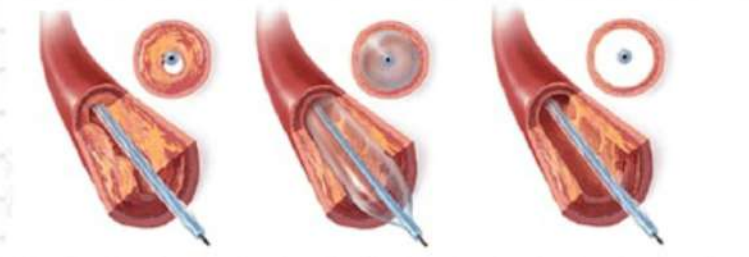
Il budget totale ammonta a 27.008 milioni di euro. La regione Lombardia spende per la sanità 20.121,1 all'anno per la sanità, che in percentuale corrisponde al 74,5%.



ESERCIZIO 5: Cercare cos'è l'angioplastica, stent e nitinol.

L'angioplastica è una metodica utilizzata in ambito medico per dilatare un restringimento del lume (stenosi) di un vaso sanguigno, causato, nella maggior parte dei casi, dalla presenza di un ateroma (degenerazione delle pareti arteriose dovute al deposito di placche formate da grasso e tessuto cicatriziale).

La dilatazione del vaso viene effettuata per mezzo di uno speciale catetere a palloncino che viene introdotto mediante la puntura percutanea di un'arteria, portato fino al vaso stenotico e successivamente gonfiato in corrispondenza del restringimento, in modo da ripristinare il normale diametro del vaso e permettere un incremento del flusso sanguigno.



Lo stent è una struttura metallica cilindrica a maglie, che viene introdotta negli organi a lume (cioè gli organi cavi) e viene fatta espandere, con l'ausilio di un palloncino, fino a che il suo diametro è pari a quello del lume. In questo modo si può ridurre una stenosi.



Il Nitinol è una lega a memoria di forma di nichel e titanio. Esso:

- non è magnetico,
- ha una ottima resistenza a corrosione,
- ha buona duttilità,
- è superelastico
- è dotato di buona biocompatibilità.

La lega in Nitinol viene utilizzata per la produzione di stent endovascolari che sono molto utili nel trattamento di varie malattie cardiache.

ESERCIZIO 6: Cercare cos'è il bioprinting.

Il Bioprinting consiste in una tecnica che produce una struttura o tessuto ingegnerizzato da utilizzare in medicina rigenerativa e ricostruttiva o come materiale per test e studi biologici e farmacologici. Il bioprinting, sfruttando la tecnologia delle comuni stampanti a getto d'inchiostro, utilizza uno speciale bioink costituito da cellule che viene depositato su una speciale carta, biopaper (gel biocompatibile), strato su strato formando così delle strutture tridimensionali. La tecnica sfrutta poi la capacità autonoma

ESERCIZIO 1: Consideriamo un generico corpo rigido libero di muoversi che ha le seguenti coordinate lagrangiane:

- a) $u_A, \mathcal{N}_A, \phi_A$
- b) $u_B, \mathcal{N}_B, \phi_B$
- c) $u_A, \mathcal{N}_A, \mathcal{N}_B$
- d) u_A, ϕ_A, ϕ_B

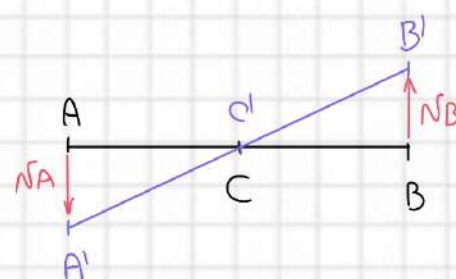
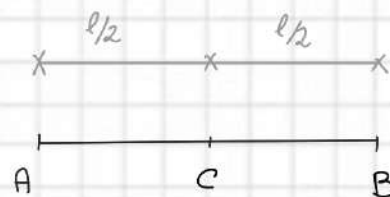
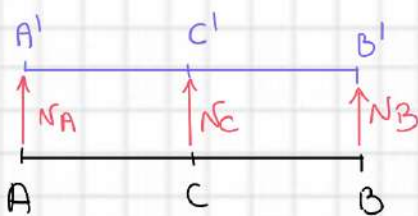
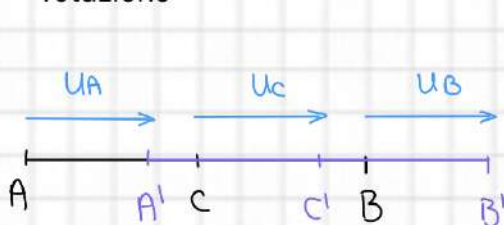
Perché sono scelte ammissibili? Perché l'ultima non lo è?

Si ha una scelta ammissibile di coordinate lagrangiane se si può esprimere lo spostamento di un punto in funzione di tali coordinate.

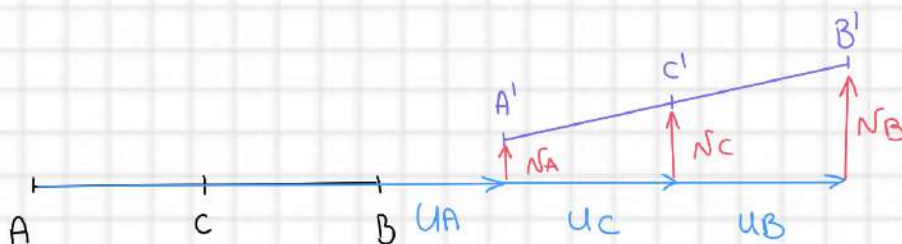
La struttura è dotata di 3 gdl.

Le possibili configurazioni sono:

- traslazione orizzontale
- traslazione verticale
- rotazione



Generica configurazione:



a)

Scelgo come coordinate lagrangiane $u_A, \mathcal{N}_A, \phi_A$

Verifico che siano ammissibili esprimendo lo spostamento del punto C in funzione delle coordinate lagrangiane:

$$\begin{cases} u_C = u_A \\ \mathcal{N}_C = \mathcal{N}_A + \phi_A \cdot \frac{l}{2} \\ \phi_C = \phi_A \end{cases}$$

b)

Scelgo come coordinate lagrangiane $u_B, \mathcal{N}_B, \phi_B$

Verifico che siano ammissibili esprimendo lo spostamento del punto C in funzione delle coordinate lagrangiane:

$$\begin{cases} u_C = u_B \\ N_C = N_B - \phi_C \cdot \frac{l}{2} \\ \phi_C = \phi_B \end{cases} \quad \begin{cases} u_C = u_B \\ N_C = N_B - \phi_B \cdot \frac{l}{2} \\ \phi_C = \phi_B \end{cases}$$

c)

Scelgo come coordinate lagrangiane u_A, N_A, N_B

Verifico che siano ammissibili esprimendo lo spostamento del punto C in funzione delle coordinate lagrangiane:

$$\begin{cases} u_C = u_A \\ N_C = N_B - \phi_C \cdot \frac{l}{2} \\ \phi_C = \phi_B \end{cases} \quad \begin{aligned} \text{so che: } N_A &= N_B - \phi_A \cdot l \Rightarrow \phi_A = \frac{N_A - N_B}{l} \\ \text{e che: } \phi_C &= \phi_B = \phi_A \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u_C = u_A \\ N_C = N_B - \frac{N_A - N_B}{l} \cdot \frac{l}{2} \\ \phi_C = \frac{N_A - N_B}{l} \end{cases} \quad \begin{cases} u_C = u_A \\ N_C = \frac{N_B - N_A}{2} \\ \phi_C = \frac{N_A - N_B}{l} \end{cases}$$

d)

Scelgo come coordinate lagrangiane u_A, ϕ_A, ϕ_B

Verifico che **non** siano ammissibili non riuscendo a esprimere lo spostamento del punto C in funzione delle coordinate lagrangiane:

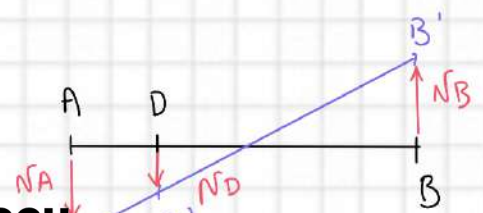
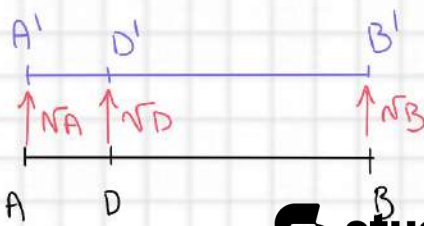
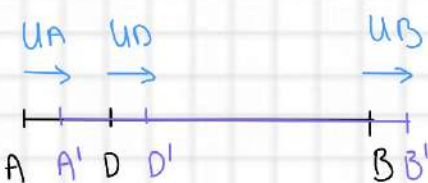
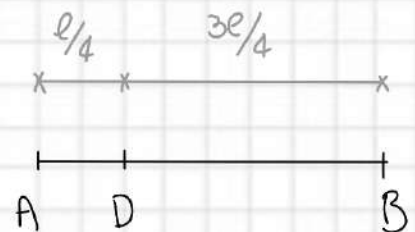
$$\begin{cases} u_C = u_A \\ N_C = N_A + \phi_A \cdot \frac{l}{2} \\ \phi_C = \phi_A \end{cases}$$

ESERCIZIO 2: Data una struttura senza vincoli, fare due possibili scelte di coordinate lagrangiane dimostrando che sono ammissibili.

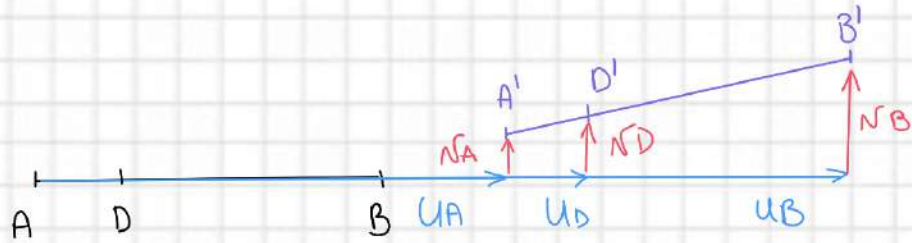
La struttura è dotata di 3 gdl.

Le possibili configurazioni sono:

- traslazione orizzontale
- traslazione verticale
- rotazione



Generica configurazione:



1)

Scelgo come coordinate lagrangiane u_B, n_B, ϕ_B

Verifico che siano ammissibili esprimendo lo spostamento del punto D in funzione delle coordinate lagrangiane:

$$\begin{cases} u_D = u_B \\ n_D = n_B - \phi_B \cdot \frac{3e}{4} \\ \phi_D = \phi_B \end{cases} \quad \begin{cases} u_D = u_B \\ n_D = n_B - \phi_B \cdot \frac{3e}{4} \\ \phi_D = \phi_B \end{cases}$$

2)

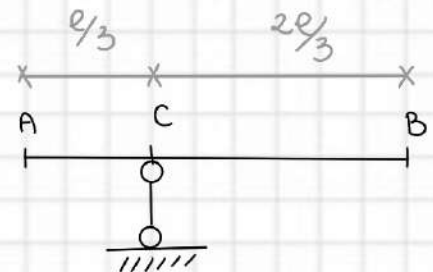
Scelgo come coordinate lagrangiane u_A, n_B, ϕ_A

Verifico che siano ammissibili esprimendo lo spostamento del punto D in funzione delle coordinate lagrangiane:

$$\begin{cases} u_D = u_A \\ n_D = n_B - \phi_A \cdot \frac{3e}{4} \\ \phi_D = \phi_A \end{cases} \quad \begin{cases} u_D = u_A \\ n_D = n_B - \phi_A \cdot \frac{3e}{4} \\ \phi_D = \phi_A \end{cases}$$

ESERCIZIO 3: Data la struttura, disegnare la configurazione variata e scegliere due possibili set di coordinate lagrangiane.

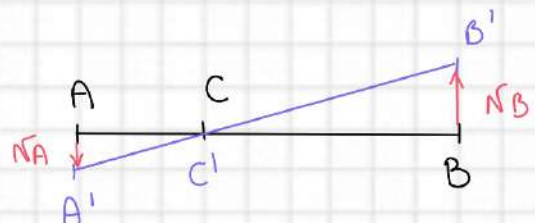
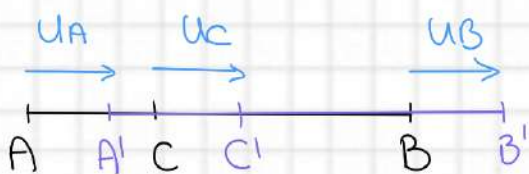
La struttura presenta 2 gdl dato che è presenta un pendolo che impedisce lo spostamento verticale del punto C.



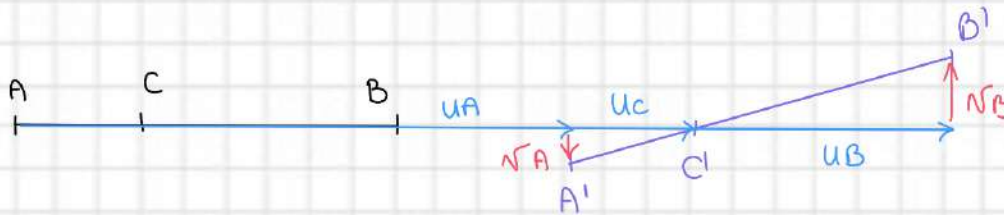
Equazione di vincolo: $n_C = 0$

Le possibili configurazioni sono:

- traslazione orizzontale
- rotazione



Generica configurazione:



1)

Scelgo come coordinate lagrangiane u_A, N_A

Verifico che siano ammissibili esprimendo lo spostamento del punto B in funzione delle coordinate lagrangiane:

$$\begin{cases} u_B = u_A \\ N_B = \phi_B \frac{2e}{3} \\ \phi_B = \phi_A = \frac{N_A}{\frac{e}{3}} \end{cases} \quad \begin{cases} u_B = u_A \\ N_B = \frac{3N_A}{2} \cdot \frac{2}{3} e \\ \phi_B = \frac{3N_A}{e} \end{cases} \quad \begin{cases} u_B = u_A \\ N_B = 2N_A \\ \phi_B = \frac{3N_A}{e} \end{cases}$$

2)

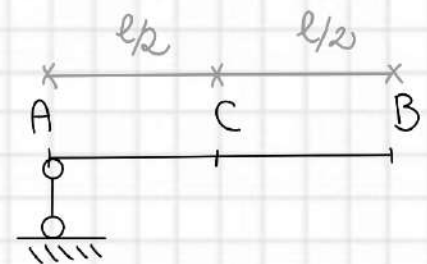
Scelgo come coordinate lagrangiane u_C, ϕ_C

Verifico che siano ammissibili esprimendo lo spostamento del punto B in funzione delle coordinate lagrangiane:

$$\begin{cases} u_B = u_A \\ N_B = \phi_C \cdot \frac{2}{3} e \\ \phi_B = \phi_C \end{cases}$$

ESERCIZIO 4: Data la struttura, disegnare la configurazione variata e scegliere due possibili set di coordinate lagrangiane.

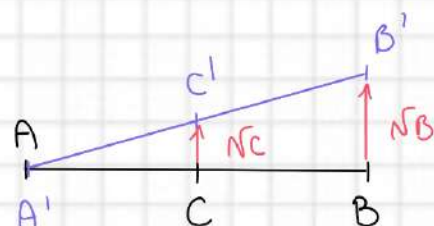
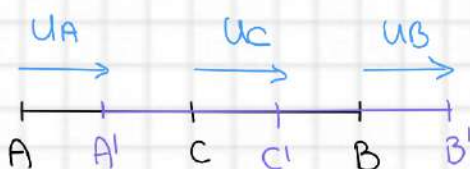
La struttura presenta 2 gdl dato che è presenta un pendolo che impedisce lo spostamento verticale del punto C.



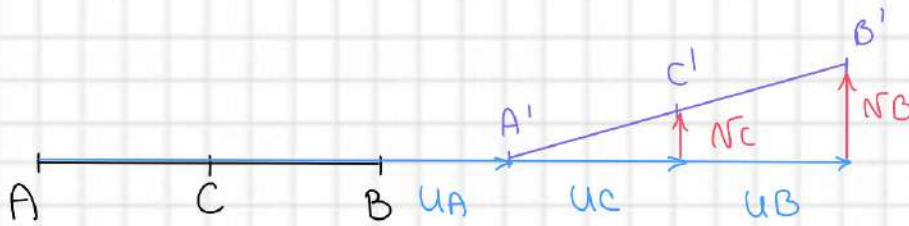
Equazione di vincolo: $N_A = 0$

Le possibili configurazioni sono:

- traslazione orizzontale
- rotazione



Generica configurazione:



1)

Scelgo come coordinate lagrangiane u_A, n_B

Verifico che siano ammissibili esprimendo lo spostamento del punto C in funzione delle coordinate lagrangiane:

$$\begin{cases} u_C = u_A \\ n_C = n_B - \phi_C \frac{e}{2} \\ \phi_C = \phi_A = \phi_B = \frac{n_B}{e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_C = u_A \\ n_C = n_B - \frac{n_B}{e} \cdot \frac{e}{2} \\ \phi_C = \frac{n_B}{e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_C = u_A \\ n_C = \frac{n_B}{2} \\ \phi_C = \frac{n_B}{e} \end{cases}$$

2)

Scelgo come coordinate lagrangiane u_B, ϕ_A

Verifico che siano ammissibili esprimendo lo spostamento del punto C in funzione delle coordinate lagrangiane:

$$\begin{cases} u_C = u_B \\ n_C = n_B - \phi_A \frac{e}{2} \\ \phi_C = \phi_A \end{cases}$$

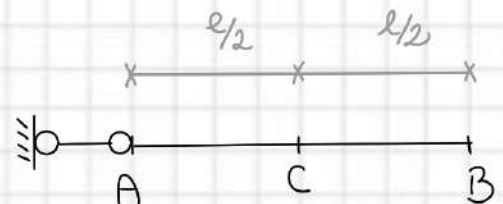
so che $n_B = \phi_A \cdot e$

$$\begin{cases} u_C = u_B \\ n_C = \phi_A \cdot e - \phi_A \frac{e}{2} \\ \phi_C = \phi_A \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_C = u_B \\ n_C = \phi_A \frac{e}{2} \\ \phi_C = \phi_A \end{cases}$$

ESERCIZIO 5: Data la struttura, disegnare la configurazione variata e scegliere due possibili set di coordinate lagrangiane.

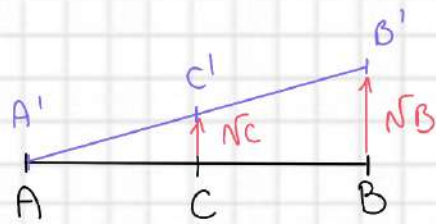
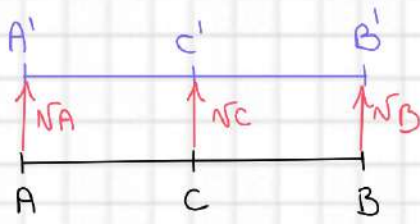
La struttura presenta 2 gdl dato che è presenta un pendolo che impedisce lo spostamento orizzontale del punto A.



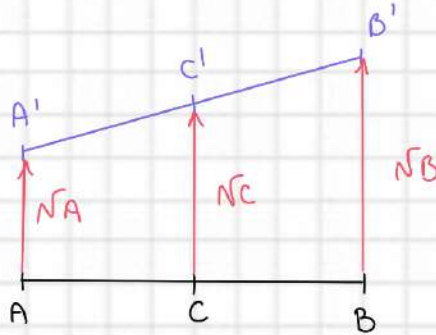
Equazione di vincolo: $u_A = 0$

Le possibili configurazioni sono:

- traslazione verticale
- rotazione:



Generica configurazione:



1)

Scelgo come coordinate lagrangiane N_A, Φ_A

Verifico che siano ammissibili esprimendo lo spostamento del punto C in funzione delle coordinate lagrangiane:

$$\begin{cases} u_C = 0 \\ N_C = N_A + \Phi_A \frac{e}{2} \\ \Phi_C = \Phi_A \end{cases}$$

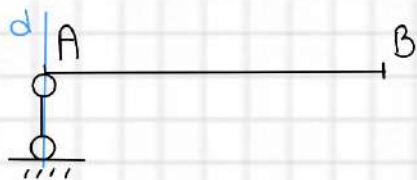
2)

Scelgo come coordinate lagrangiane N_A, N_B

Verifico che siano ammissibili esprimendo lo spostamento del punto C in funzione delle coordinate lagrangiane:

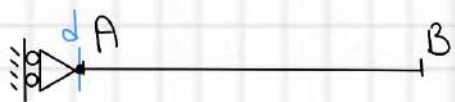
$$\begin{cases} u_C = 0 \\ N_C = N_A + \Phi_A \frac{e}{2} \\ \Phi_C = \Phi_A \end{cases} \quad \begin{aligned} \text{so che } N_A &= N_B - \Phi_A e \\ N_B - N_A &= \Phi_A e \\ \Rightarrow \Phi_A &= \frac{N_B - N_A}{e} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u_C = 0 \\ N_C = N_A + \frac{N_B - N_A}{e} \frac{e}{2} \\ \Phi_C = \Phi_A \end{cases} \quad \begin{cases} u_C = 0 \\ N_C = N_A + \frac{N_B}{2} - \frac{N_A}{2} \\ \Phi_C = \Phi_A \end{cases} \quad \begin{cases} u_C = 0 \\ N_C = \frac{N_A + N_B}{2} \\ \Phi_C = \Phi_A \end{cases}$$

ESERCIZIO 1: Confrontare le strutture e scrivere le equazioni di vincolo.

Pendolo ad asse verticale

$$S^d = 0 \Rightarrow N_A = 0$$



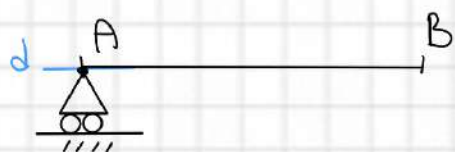
Carrello ad asse verticale

$$S^{Id} = 0 \Rightarrow U_A = 0$$



Pendolo ad asse orizzontale

$$S^d = 0 \Rightarrow U_A = 0$$

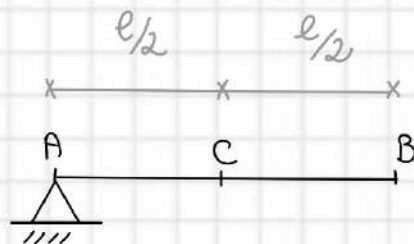


Carrello ad asse orizzontale

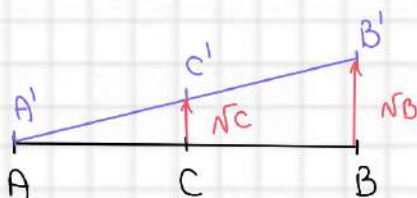
$$S^{Id} = 0 \Rightarrow N_A = 0$$

ESERCIZIO 2: Scrivere il numero di gdl della struttura cerniera e fare due possibili scelte di coordinate lagrangiane.

La struttura presenta 1 gdl dato che è un vincolo doppio e impedisce le traslazioni verticali e orizzontali

Equazione di vincolo:

$$S = 0 \Rightarrow \begin{cases} U_A = 0 \\ N_A = 0 \end{cases}$$

Generica configurazione:

1)

Scelgo come coordinata lagrangiana ϕ_A

Verifico che siano ammissibili esprimendo lo spostamento del punto C in funzione delle coordinate lagrangiane:

$$\begin{cases} U_C = 0 \\ N_C = \phi_A \frac{l}{2} \end{cases}$$

2)

Scelgo come coordinata lagrangiana N_B

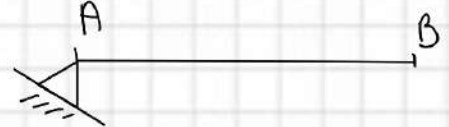
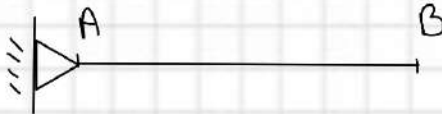
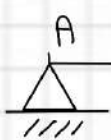
Verifico che siano ammissibili esprimendo lo spostamento del punto C in funzione delle coordinate lagrangiane:

$$\begin{cases} u_C = 0 \\ N_C = N_B - \phi_C \frac{l}{2} \\ \phi_C = \frac{N_B}{e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_C = 0 \\ N_C = N_B - \frac{N_B}{e} \cdot \frac{l}{2} \\ \phi_C = \frac{N_B}{e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_C = 0 \\ N_C = \frac{N_B}{2} \\ \phi_C = \frac{N_B}{e} \end{cases}$$

ESERCIZIO 3: Individuare le possibili differenze tra le strutture.



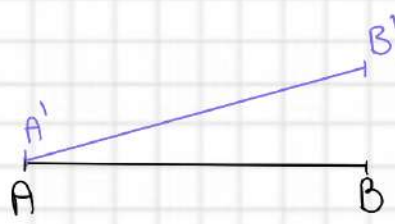
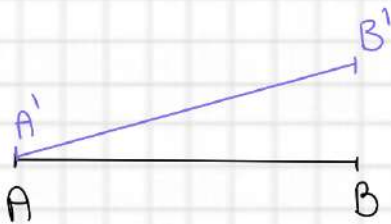
Equazione di vincolo:

$$S=0 \Rightarrow \begin{cases} u_A=0 \\ N_A=0 \end{cases}$$

$$S=0 \Rightarrow \begin{cases} u_A=0 \\ N_A=0 \end{cases}$$

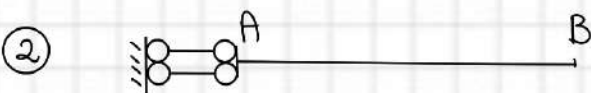
$$S=0 \Rightarrow \begin{cases} u_A=0 \\ N_A=0 \end{cases}$$

Generica configurazione:



Non c'è nessuna differenza tra le strutture: la cerniera blocca due spostamenti, non importa l'orientamento della cerniera.

ESERCIZIO 4: Riflettere sulle strutture, sono equivalenti?



1)

La struttura presenta un vincolo pendolo semplice in A che ne impedisce la traslazione orizzontale e un pendolo semplice in B che ne impedisce la traslazione orizzontale:



Equazioni di vincolo: $u_A = 0$

$u_B = 0$

Sebbene abbia 2 vincoli semplici la struttura presenta 2 gdl $\rightarrow$ i vincoli non sono stati messi in maniera appropriata.

Generica configurazione:



2)

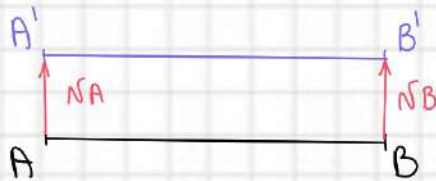
La struttura presenta un vincolo doppio pendolo in A che impedisce la traslazione orizzontale e la rotazione, pertanto la struttura presenta 1 gdl.



Equazioni di vincolo: $U_A = 0$

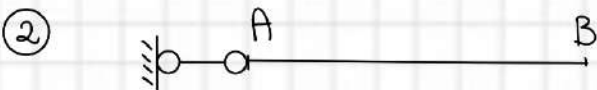
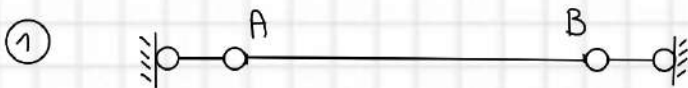
$$\Phi_A = 0$$

Generica configurazione:



Le due strutture non sono equivalenti.

ESERCIZIO 5: Confrontare le due strutture; sono equivalenti?



1)

La struttura presenta un vincolo pendolo semplice in A che non impedisce la traslazione orizzontale e un vincolo pendolo semplice in B che impedisce la traslazione orizzontale.



Equazione di vincolo: $U_A = 0$

$$U_B = 0$$

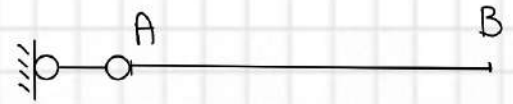
Sebbene abbia 2 vincoli semplici, la struttura presenta 2 gdl $\rightarrow$ i vincoli non sono stati messi in maniera appropriata.

Generica configurazione:



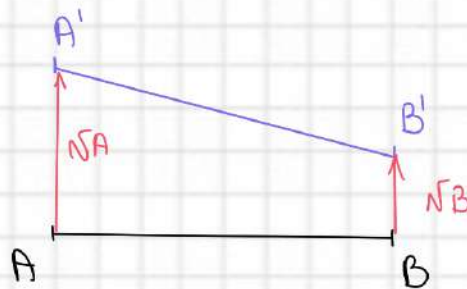
2)

La struttura presenta un vincolo pendolo semplice in A che impedisce la traslazione orizzontale, pertanto la struttura presenta 2 gdl.



Equazione di vincolo: $U_A = 0$

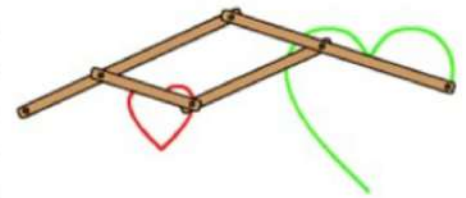
Generica configurazione:



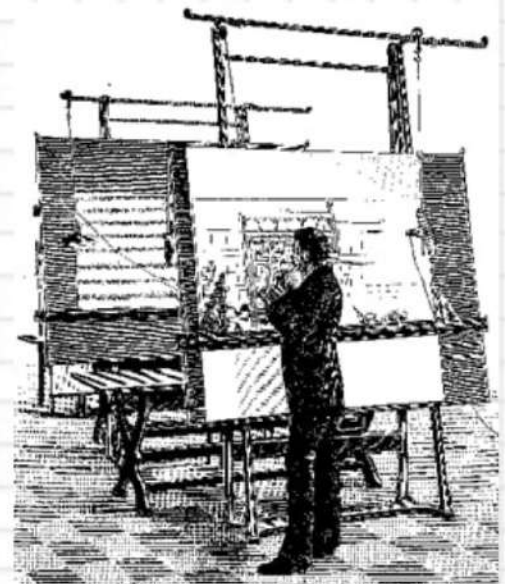
Le due strutture sono equivalenti.

ESERCIZIO 6: Cercare cos'è un pentografo e un tecnigrafo.

Pentografo: strumento che permette di riprodurre disegni in scala diversa, sia rimpiccioliti che ingranditi, a partire da un disegno o da una sagoma (solitamente in legno).



Tecnigrafo: strumento di assistenza al disegno tecnico composto da una squadra montata su di un goniometro che ne consente la rotazione angolare. Il gruppo (squadra e goniometro) è in grado di muoversi liberamente sulla superficie del piano di lavoro, attraverso lo scorrimento diretto o indiretto su due guide ancorate al tavolo da disegno o al banco. Tali guide, che fungono da binari, vincolano il movimento del gruppo rispettivamente nella direzione orizzontale o verticale del piano di lavoro e possono essere bloccate indipendentemente una dall'altra.



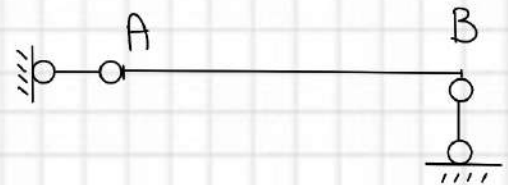
Studiare la struttura:

- tradurre i vincoli grafici in equazioni
- capire se la struttura è dotata di gdl
- disegnare una possibile configurazione compatibile con i vincoli

ESERCIZIO 7: Studiare le seguenti strutture:

1)

La struttura presenta un vincolo pendolo ad asse orizzontale in A e un vincolo pendolo ad asse verticale in B

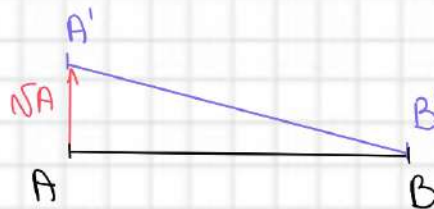


Equazioni di vincolo: $U_A = 0$

$$N_B = 0$$

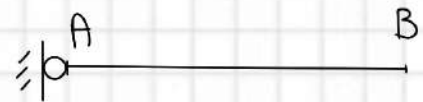
Dato che lo spostamento orizzontale è bloccato in A, lo è anche in B; è invece concesso lo spostamento verticale in A e la rotazione in B $\Rightarrow$ La struttura è equivalente a un vincolo cerniera in B $\Rightarrow$ presenta 1 gdl.

Generica configurazione:



2)

La struttura presenta un vincolo cerniera in A.



Equazioni di vincolo: $U_A = 0$

$$N_A = 0$$

E' concessa una rotazione in A che implica una traslazione verticale in B.

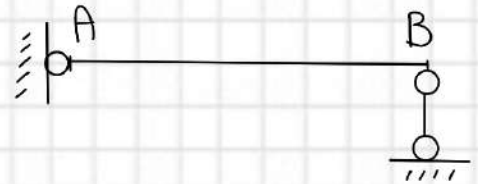
La struttura presenta 1 gdl.

Generica configurazione:



3)

La struttura presenta un vincolo cerniera in A e un vincolo pendolo ad asse verticale in B.



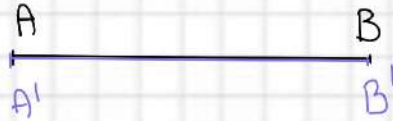
Equazioni di vincolo:

$$U_A = 0 \quad N_B = 0$$

$$N_A = 0$$

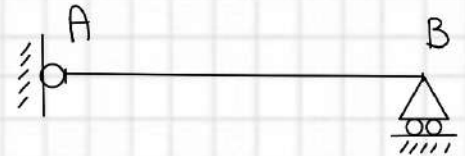
La struttura è equivalente al vincolo incastro $\Rightarrow$ presenta 0 gdl.

Generica configurazione:



4)

La struttura presenta un vincolo cerniera in A e un vincolo carrello ad asse orizzontale in B.



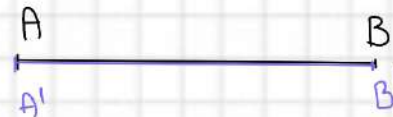
Equazioni di vincolo:

$$U_A = 0 \quad N_B = 0$$

$$N_A = 0$$

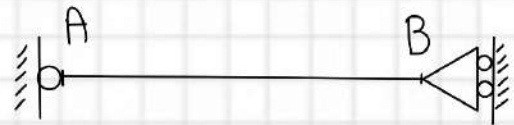
La struttura è equivalente al vincolo incastro $\Rightarrow$ presenta 0 gdl.

Generica configurazione:



5)

La struttura presenta un vincolo cerniera in A e un vincolo carrello ad asse verticale in B.



Equazioni di vincolo:

$$U_A = 0 \quad U_B = 0$$

$$N_A = 0$$

E' consentita una rotazione in A che implica una traslazione verticale in B.

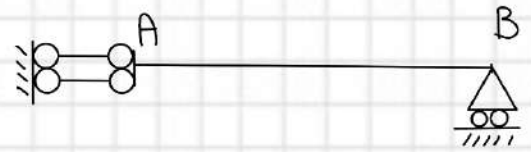
La struttura presenta 1 gdl.

Generica configurazione:



6)

La struttura presenta un vincolo doppio pendolo ad asse orizzontale in A e un vincolo carrello ad asse orizzontale in B.



Equazioni di vincolo:

$$U_A = 0 \quad N_B = 0$$

$$\phi_A = 0$$

L'unica traslazione consentita è quella verticale in A.

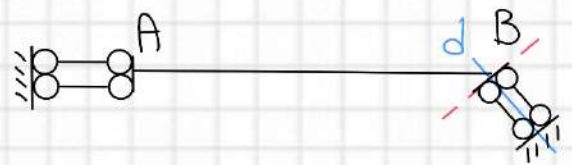
La struttura presenta 1 gdl.

Generica configurazione:



7)

La struttura presenta un vincolo doppio pendolo ad asse orizzontale in A e un vincolo doppio pendolo ad asse in direzione d in B.



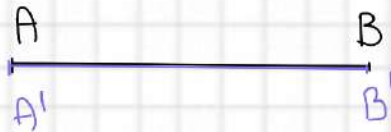
Equazioni di vincolo:

$$U_A = 0 \quad S_B^d = 0$$

$$\phi_A = 0 \quad \phi_B = 0$$

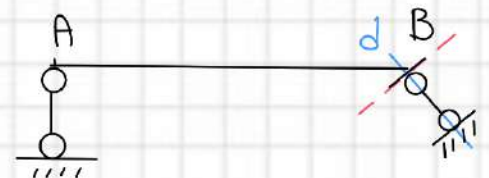
Struttura equivalente al vincolo incastro $\Rightarrow$ presenta 0 gdl.

Generica configurazione:



ESERCIZIO 8: Qual è una possibile configurazione?

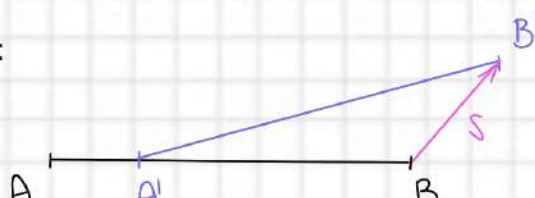
La struttura presenta un vincolo pendolo ad asse verticale in A e un vincolo pendolo con asse in direzione d in B.



Equazioni di vincolo:

$$N_A = 0 \quad S_B^d = 0$$

Generica configurazione:



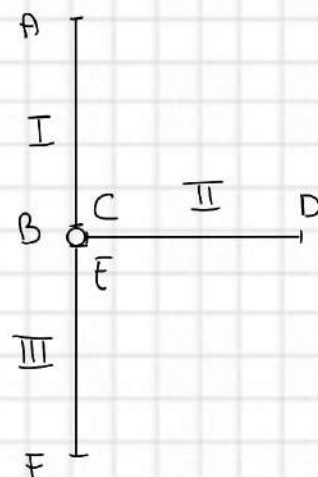
ESERCIZIO 1: Di quanti gdl è dotata la struttura?

Considero inizialmente il corpo I e prendo come coordinate lagrangiane $u_A, \sqrt{A}, \phi_A$

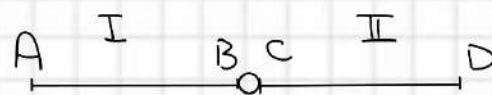
Considero ora il corpo II il quale può solo ruotare quindi ho come coordinate lagrangiane $\Delta \phi_{I-II}$

Considero ora il corpo III il quale può solo ruotare quindi ho come coordinata lagrangiana $\Delta \phi_{I-III}$

Quindi ho 5 coordinate lagrangiane $\Rightarrow$ 5 gdl.

**ESERCIZIO 2: Disegnare le catene cinematiche della seguente struttura.**

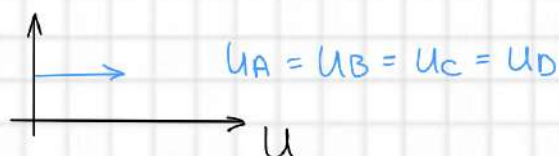
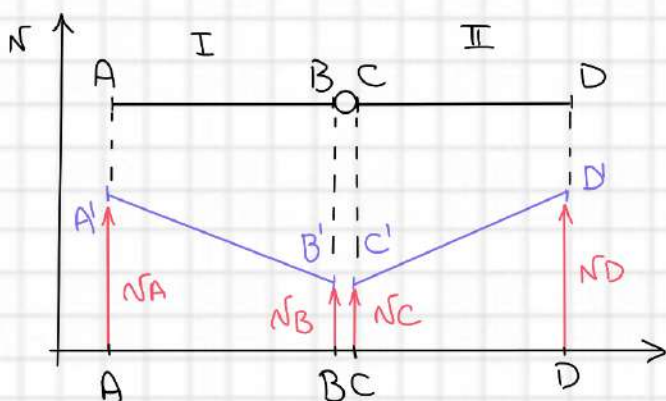
Si ha un vincolo cerniera interna

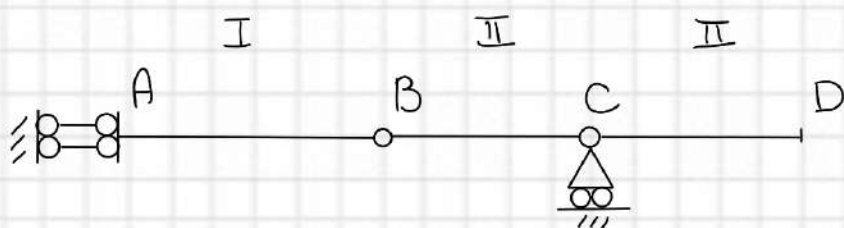


Equazioni di vincolo:

$$\Delta S_{I-II} = 0 \quad \begin{cases} \Delta u_{BC} = 0 \\ \Delta \sqrt{BC} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_B = u_C \\ \sqrt{B} = \sqrt{C} \end{cases}$$

Catene cinematiche:



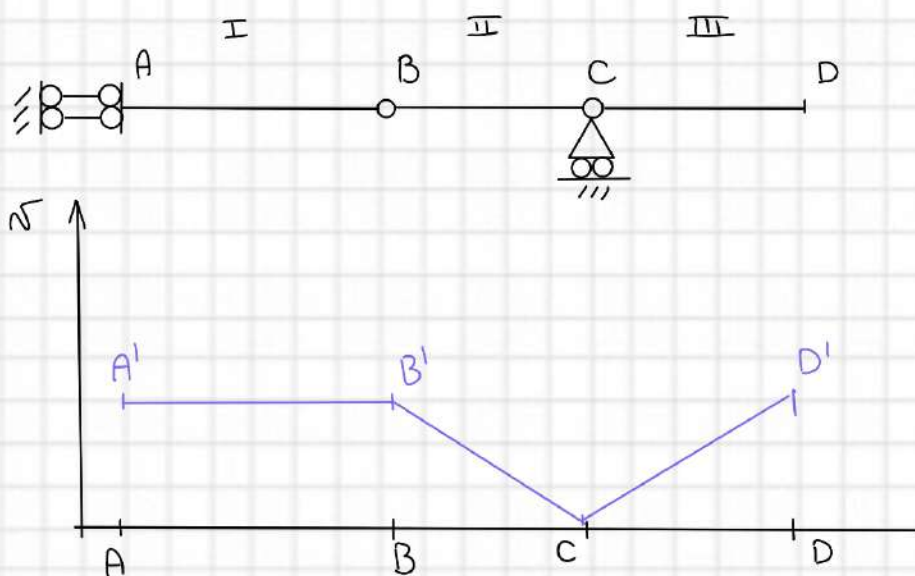
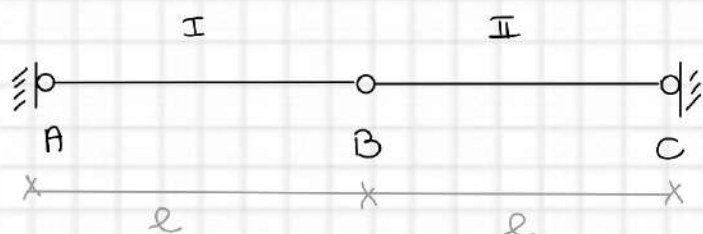
ESERCIZIO 1: Disegnare le catene cinematiche della seguente struttura.Formula $[3t - s = l - i]$

$$t = 3$$

$$\rightarrow 3t - s = 9 - 7 = 2 \quad \text{è dotata di 2 labilità}$$

$$s = 7$$

Catene cinematiche

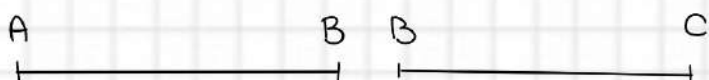
**ESERCIZIO 2:** studiare la struttura con il metodo analitico.

$$3t - s = 6 - 6 = 0$$

$$l - i = 0$$

 $\Rightarrow$ situazione ambigua

1. Struttura senza vincoli



2. Gdl

$$u_A, v_A, \phi_A, u_C, v_C, \phi_C$$

3. Equazioni di vincolo

Vincolo cerniera in A

$$u_A = 0$$

$$N_A = 0$$

Vincolo cerniera in C

$$u_C = 0$$

$$N_C = 0$$

Vincolo cerniera in B

$$u_B^I = u_B^II$$

$$N_B^I = N_B^II$$

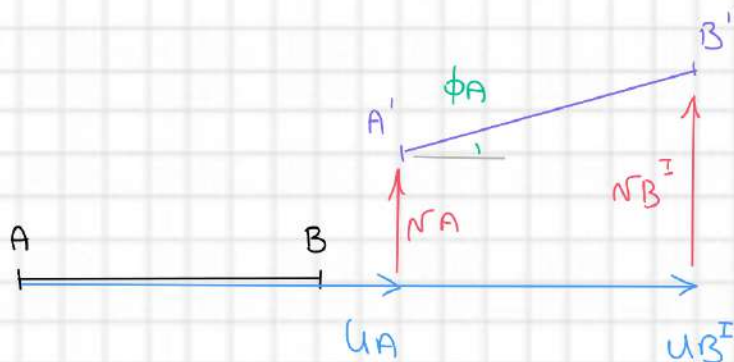
4. Equazioni di vincolo in funzione dei gdl

$$u_A = 0 \quad OK$$

$$N_A = 0 \quad OK$$

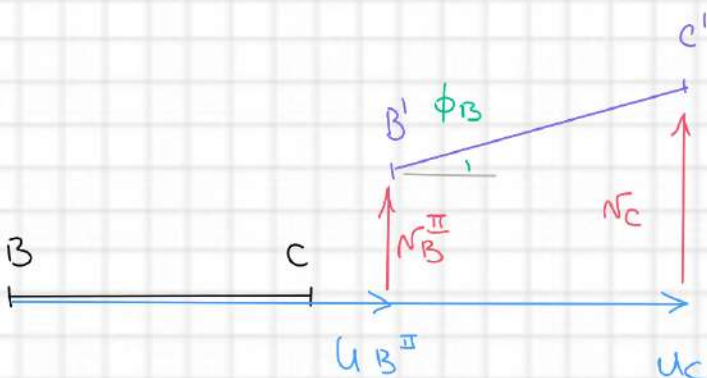
$$u_C = 0 \quad OK$$

$$N_C = 0 \quad OK$$



$$u_B^I = u_A$$

$$N_B^I = N_A + \phi_A e$$



$$u_B^II = u_C$$

$$N_B^II = N_C - \phi_B e$$

$$= N_C - \phi_C e$$

$$\begin{cases} U_A = 0 \\ N_A = 0 \\ U_C = 0 \\ N_C = 0 \\ U_A - U_C = 0 \\ N_A + \phi_{Ae} - N_C + \phi_{Ce} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_A = 0 \\ N_A = 0 \\ U_C = 0 \\ N_C = 0 \\ 0 = 0 \\ \phi_{Ae} + \phi_{Ce} = 0 \end{cases}$$

5. Sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_A \\ N_A \\ \phi_A \\ U_C \\ N_C \\ \phi_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Rendo la matrice triangolare (così il determinante si calcola facendo il prodotto degli elementi sulla diagonale principale). Sommo la terza alla quinta riga:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & e \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$



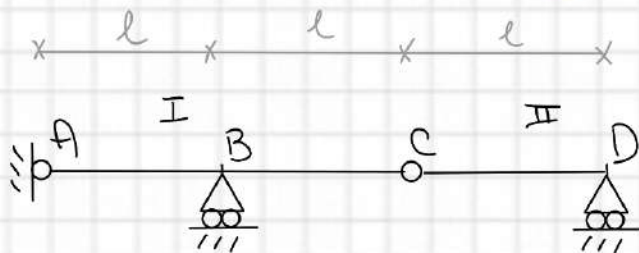
Sposto la 5 riga alla posizione 3; la riga 3 alla posizione 4 e la riga 4 alla posizione 5.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Dato che il determinante è nullo, la matrice non ha rango massimo.

$$l = \dim(A) - \text{rg}(A) > 0 \Rightarrow \text{struttura labile e ipervincolata}$$

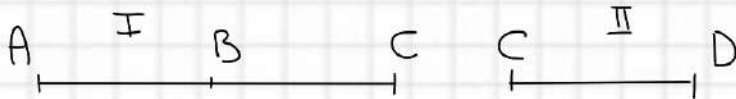
ESERCIZIO 3: Si determini la labilità della seguente struttura con il metodo analitico.



$$3l - 5 = 6 - 6 = 0$$

$$l - i = 0$$

1. Struttura senza vincoli



2. Gdl

$$u_A, N_A, \phi_A, u_D, N_D, \phi_D$$

3. Equazioni di vincolo

vincolo cerniera in A

$$u_A = 0$$

$$N_A = 0$$

vincolo carrello a scorrimento orizzontale in B

$$N_B = 0$$

vincolo cerniera interna in C

$$u_C^I = u_C^{II}$$

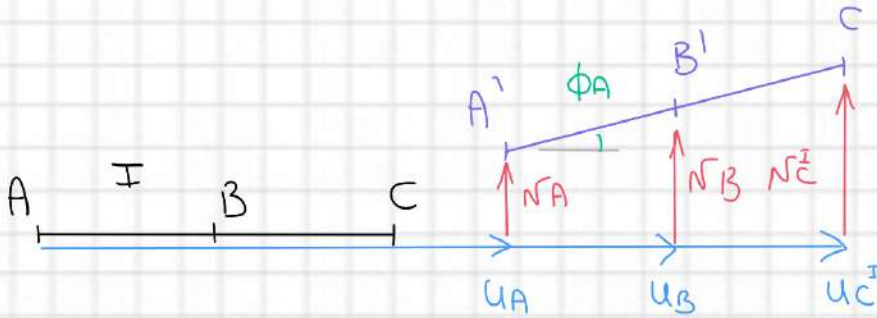
$$N_C^I = N_C^{II}$$

4. Equazioni di vincolo in funzione dei gdl

$$U_A = 0 \quad \text{OK}$$

$$N_A = 0 \quad \text{OK}$$

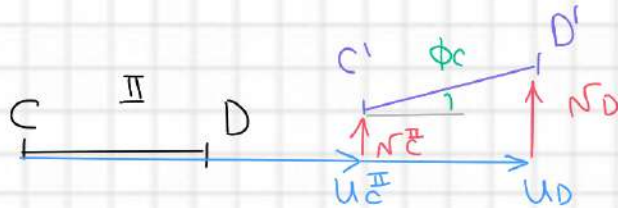
$$N_D = 0 \quad \text{OK}$$



$$U_C^I = U_A$$

$$N_C^I = N_A + \phi_A \cdot 2e$$

$$N_B = N_A + \phi_A e$$



$$U_C^II = U_D$$

$$N_C^II = N_D - \phi_D e$$

$$= N_D - \phi_D e$$

$$\begin{cases} U_A = 0 \\ N_A = 0 \\ N_A + \phi_A e = 0 \\ U_A - U_D = 0 \\ N_A + \phi_A 2e - N_D + \phi_D e = 0 \\ N_D = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_A = 0 \\ N_A = 0 \\ \phi_A e = 0 \\ U_D = 0 \\ \phi_A 2e + \phi_D e = 0 \\ N_D = 0 \end{cases}$$

5. Sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_A \\ N_A \\ \phi_A \\ U_D \\ N_D \\ \phi_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Rendo la matrice triangolare e calcolo il determinante:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2e & 0 & 0 & e \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\lambda = \dim(A) - \operatorname{rg}(A) = 6 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad e = 0, i = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{struttura isostatica}$$

ESERCIZIO 1: Rivedere il modello di punto materiale; quanti gdl si hanno? Che azioni si hanno?

Un punto materiale libero di muoversi nello spazio ha 3 gdl e può solo compiere traslazioni quindi nel mondo dell'equilibrio si considerano solo le forze.

ESERCIZIO 2: Sono soddisfatte le equazioni di equilibrio?

$$\sum F_x = 0$$

OK!

$$\sum F_y = 0$$

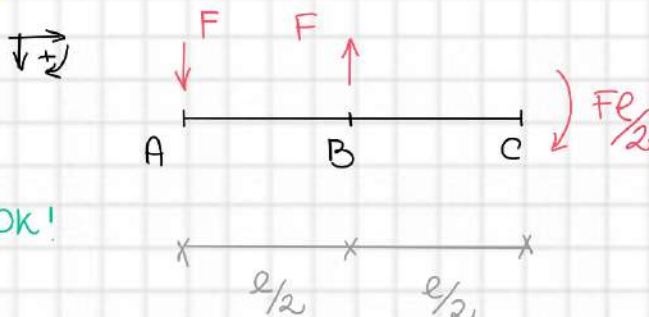
$$F - F = 0$$

OK!

$$\sum M_c = 0$$

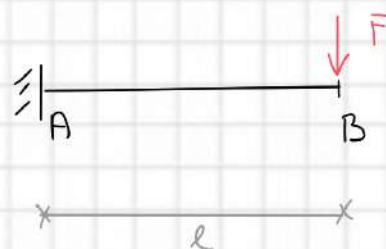
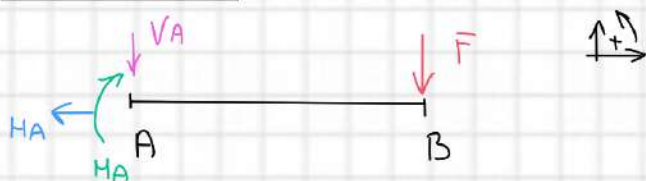
$$-F\ell + F\frac{\ell}{2} + F\frac{\ell}{2} = 0$$

OK!

**ESERCIZIO 3: Risolvere l'esercizio svolto in aula con una diversa scelta di reazioni vincolari.**

La struttura presenta un vincolo incastro in A.

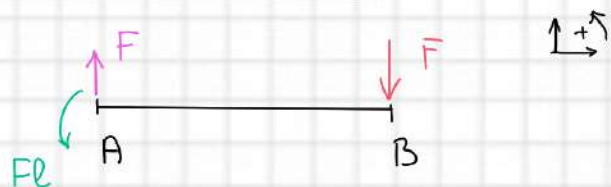
Reazioni vincolari



Equazioni di equilibrio (polo A)

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ -V_A - F = 0 \\ -M_A - F\ell = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = -F \\ M_A = -F\ell \end{cases}$$

Struttura con reazioni vincolari



Verifica

$$\sum F_x = 0$$

OK!

$$\sum F_y = 0$$

$$F - F = 0$$

OK!

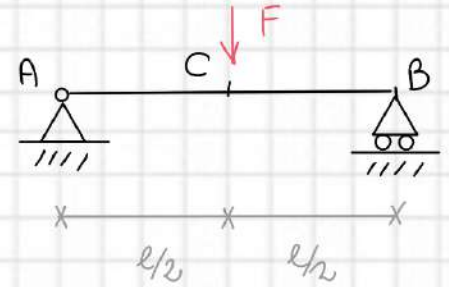
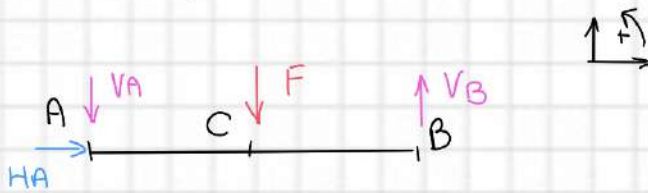
$$\sum M_B = 0$$

$$F\ell - F\ell = 0$$

OK!

ESERCIZIO 4: Scrivere le equazioni di equilibrio della seguente struttura studiata in aula con un diverso sistema di riferimento.

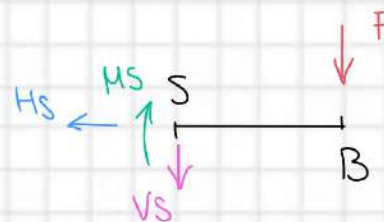
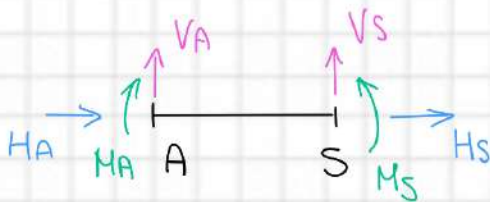
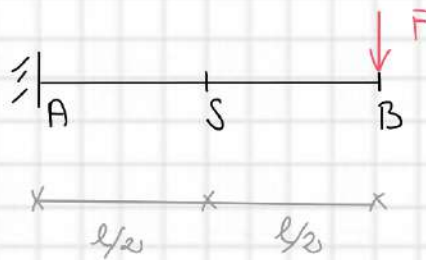
Reazioni vincolari



Equazioni di equilibrio (polo A)

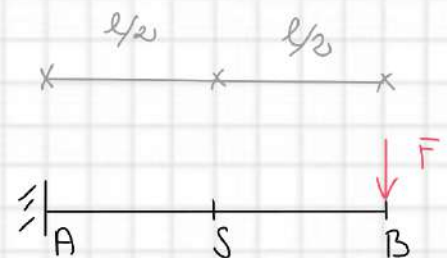
$$\begin{cases} H_A = 0 \\ -V_A - F + V_B = 0 \\ -F \frac{l}{2} + V_B l = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = -\frac{F}{2} \\ V_B = \frac{F}{2} \end{cases}$$

ESERCIZIO 5: Ridisegna il sistema di forze della seguente struttura studiata in aula lontane.

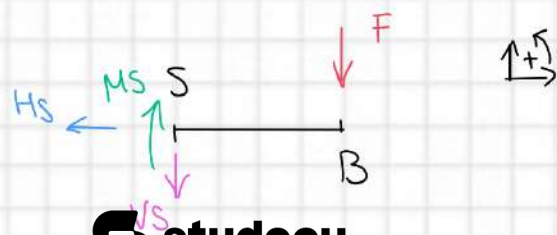
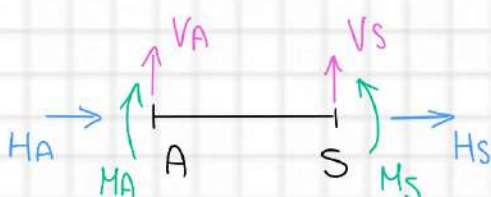


ESERCIZIO 6: Fare l'analisi statica della seguente struttura.

La struttura presenta un vincolo incastro in A e un vincolo incastro interno in S.



Reazioni vincolari



Equazioni di equilibrio (polo A)

$$\left\{ \begin{array}{l} H_A + H_S = 0 \\ V_A + V_S = 0 \\ -M_A + M_S + V_S \frac{l}{2} = 0 \\ -H_S = 0 \\ -V_S - F = 0 \\ -M_S - V_S \frac{l}{2} - Fl = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_A = 0 \\ V_A = F \\ M_A = M_S + V_S \frac{l}{2} = -F \frac{l}{2} - F \frac{l}{2} = -Fl \\ H_S = 0 \\ V_S = -F \\ M_S = -V_S \frac{l}{2} - Fl = F \frac{l}{2} - Fl = -F \frac{l}{2} \end{array} \right.$$

Struttura con reazioni vincolari



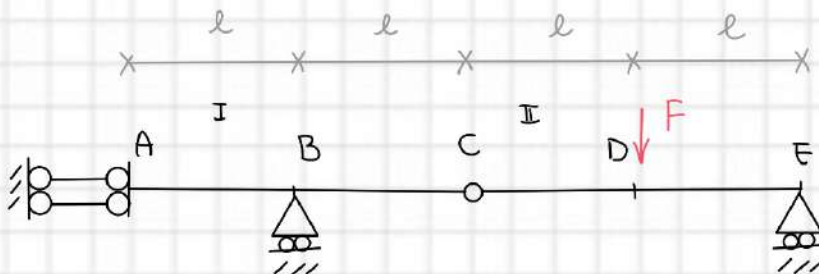
Verifica

$$\sum F_x = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad F - F + F - F = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum M_A = 0 \quad Fl - F\frac{l}{2} - F\frac{l}{2} + F\frac{l}{2} + F\frac{l}{2} - Fl = 0 \quad \text{OK!}$$

ESERCIZIO 7: Fare un'analisi cinematica e statica della seguente struttura.



ANALISI CINEMATICA

Formula $[3t - s = l - i]$

$$t = 2$$

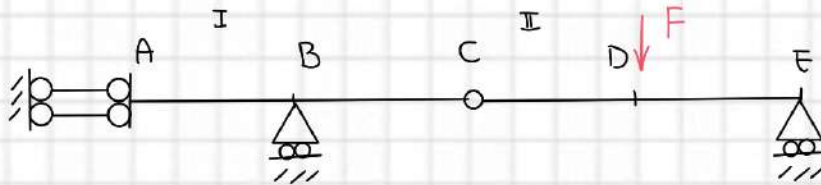
$$\rightarrow 3t - s = 6 - 6 = 0$$

$$s = 6$$

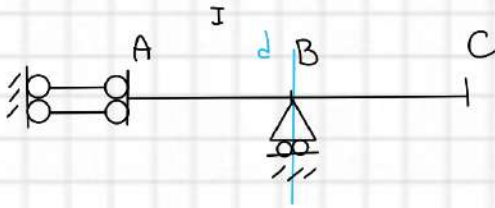
$$l - i = 0$$

$\rightarrow$ situazione ambigua

Metodo grafico [centri di rotazione]



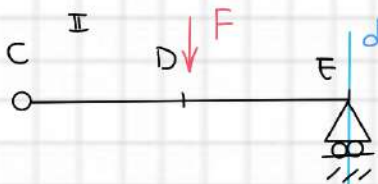
Tratto I)



$C_I \equiv C$ per il vincolo in A
 $C_I \in d$ per il vincolo in B

$\Rightarrow$ il tratto I non ha un centro di rotazione quindi non è dotato di labilità.

Tratto II)



$C_I \equiv C$ per il vincolo in C
 $C_I \in d$ per il vincolo in E

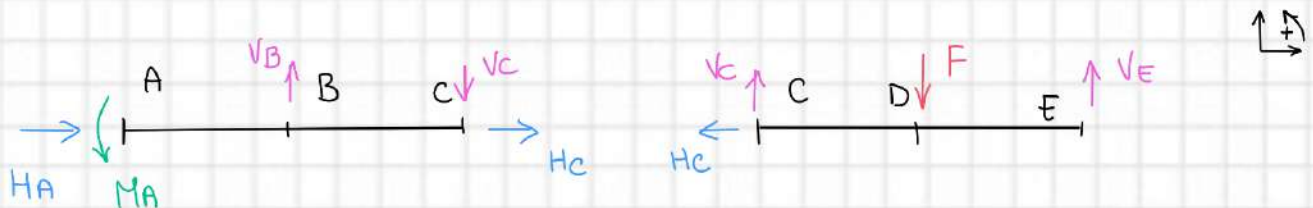
$\Rightarrow$ il tratto II non ha un centro di rotazione quindi non è dotato di labilità.

$I - i = 0 \Rightarrow i = 0 \rightarrow$ struttura isostatica

ANALISI STATICA

Reazioni vincolari

- in A ho un doppio pendolo che impedisce la rotazione e la traslazione orizzontale
- in B ho un carrello a scorrimento orizzontale che impedisce la traslazione verticale
- in C ho una cerniera interna che impedisce le traslazioni relative dei tratti 1 e 2
- in E ho un carrello a scorrimento orizzontale che impedisce la traslazione verticale



Equazioni di equilibrio (polo A)

$$\begin{cases} H_A + H_c = 0 \\ M_A + V_B \ell - V_c 2\ell = 0 \\ V_B - V_c = 0 \\ -H_c = 0 \\ V_c 2\ell - F 3\ell + V_E 4\ell = 0 \\ V_c - F + V_E = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ M_A = 2V_B \ell - V_B \ell \\ V_B = V_c \\ H_c = 0 \\ V_c = \frac{F}{2} \\ V_E = F \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ M_A = \frac{F\ell}{2} \\ V_B = \frac{F}{2} \\ H_c = 0 \\ V_c = \frac{F}{2} \\ V_E = F \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_C 2l - F 3l + V_E 4l = 0 \\ V_C - F + V_E = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_C = \frac{3F}{2} - \frac{2V_E}{1} \\ V_C = F - V_E \end{cases} \Rightarrow F - V_E = \frac{3}{2}F - 2V_E$$

$$-V_E + 2V_E = \frac{3}{2}F - F \Rightarrow V_E = \frac{F}{2}$$

$$\Rightarrow V_C = F - V_E = \frac{F}{2}$$

Struttura con reazioni vincolari



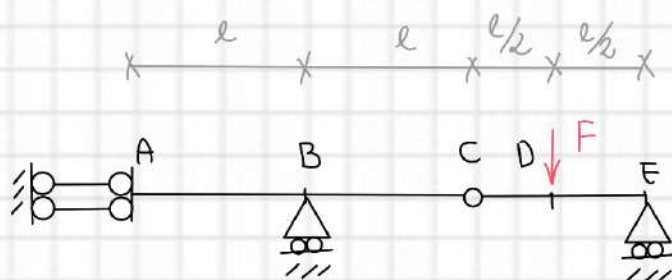
Verifica

$$\sum F_x = 0 \quad \text{OK!}$$

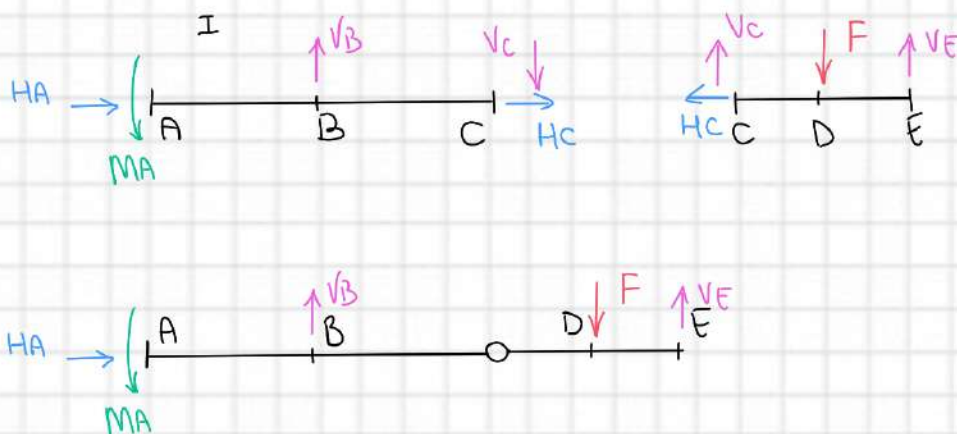
$$\sum F_y = 0 \quad \frac{F}{2} - F + \frac{F}{2} - F + \frac{F}{2} \quad \text{OK!}$$

$$\sum M_A = 0 \quad \frac{F \cdot l}{2} + \frac{F \cdot l}{2} - \frac{F \cdot 2l}{2} + \frac{F \cdot 2l}{2} - F \cdot 3l + \frac{F \cdot 4l}{2} \quad \text{OK!}$$

ESERCIZIO 1: Fare l'analisi statica scrivendo le equazioni di equilibrio del tratto I e dell'intera struttura.



Reazioni vincolari



Equazioni di equilibrio (polo A)

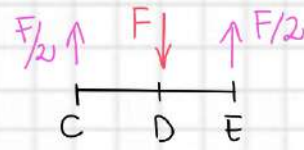
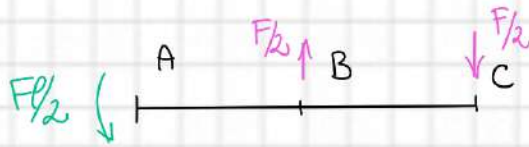
$\left\{ \begin{array}{l} H_A + H_C = 0 \\ M_A + V_B l - V_C 2l = 0 \\ V_B - V_C = 0 \\ M_A = 0 \\ M_A + V_B l - F \frac{5}{2} l + V_E 3l = 0 \\ V_B - F + V_E = 0 \end{array} \right.$	I TRATTO INTERA STRUTTURA	$\left\{ \begin{array}{l} H_C = 0 \\ M_A = V_C 2l - V_C l = V_C l \\ V_B = V_C = \frac{F}{2} \\ H_A = 0 \\ V_E = \frac{F}{2} \\ V_B = \frac{F}{2} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} H_C = 0 \\ M_A = \frac{F}{2} l \\ V_B = \frac{F}{2} \\ H_A = 0 \\ V_E = \frac{F}{2} \\ V_B = \frac{F}{2} \end{array} \right.$
---	---	--	---

$\left\{ \begin{array}{l} M_A + V_B l - F \frac{5}{2} l + V_E 3l = 0 \\ V_B - F + V_E = 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} V_B l + V_B l = F \frac{5}{2} l - V_E 3l \\ V_B = F - V_E \end{array} \right.$
--	--

$$\left\{ \begin{array}{l} V_B = \frac{F \frac{5}{2} l}{2l} - \frac{V_E 3l}{2l} \\ V_B = F - V_E \end{array} \right. \Rightarrow F \frac{5}{4} - \frac{3}{2} V_E = F - V_E \Rightarrow F - \frac{5}{4} F = \frac{3}{2} V_E - V_E$$

$$+\frac{F}{4} = +\frac{1}{2} V_E \Rightarrow V_E = \frac{F}{2}, V_B = F - \frac{F}{2} = \frac{F}{2}$$

Struttura con reazioni vincolari



Verifica

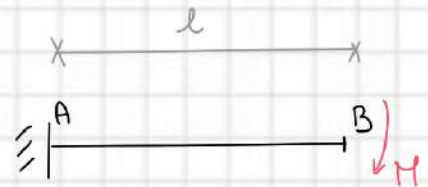
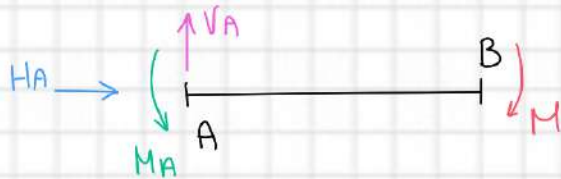
$$\sum F_x = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \frac{F}{2} - F/2 + \frac{F}{2} - F + \frac{F}{2} \quad \text{OK!}$$

$$\sum M_A = 0 \quad \frac{F\ell}{2} + \frac{F\ell}{2} - \frac{F\ell}{2} + \frac{F\ell}{2} - F\ell + \frac{3F\ell}{2} \quad \text{OK!}$$

ESERCIZIO 2: Fare l'analisi statica della seguente struttura.

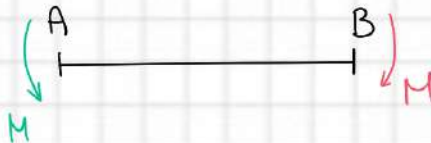
Reazioni vincolari



Equazioni di equilibrio (polo A)

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ M_A - M = 0 \\ V_A = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ M_A = M \\ V_A = 0 \end{cases}$$

Struttura con reazioni vincolari



Verifica

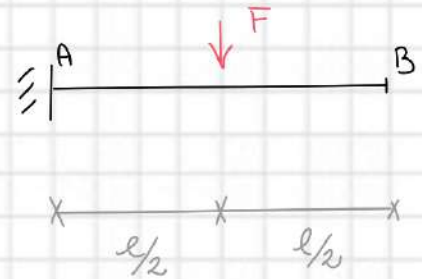
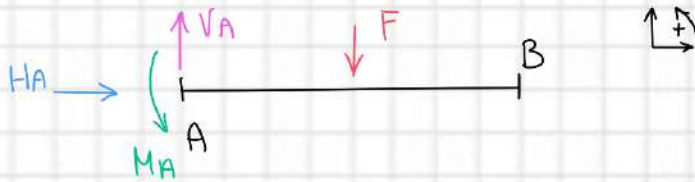
$$\sum F_x = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum M_A = 0 \quad M - M \quad \text{OK!}$$

ESERCIZIO 3: Fare l'analisi statica della seguente struttura.

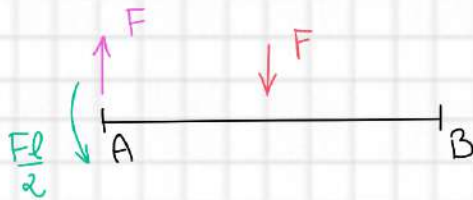
Reazioni vincolari



Equazioni di equilibrio (polo A)

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A - F = 0 \\ M_A - F \frac{l}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = F \\ M_A = F \frac{l}{2} \end{cases}$$

Struttura con reazioni vincolari



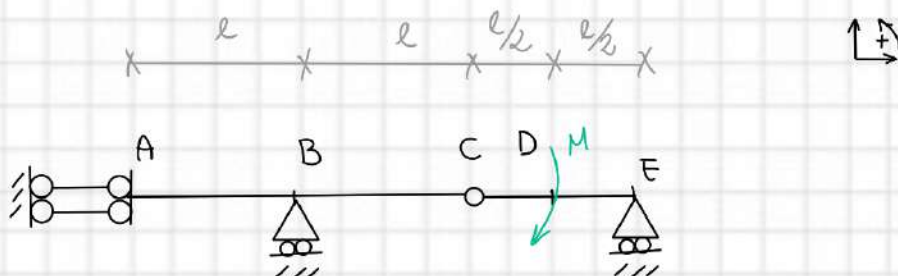
Verifica

$$\sum F_x = 0 \quad \text{OK!}$$

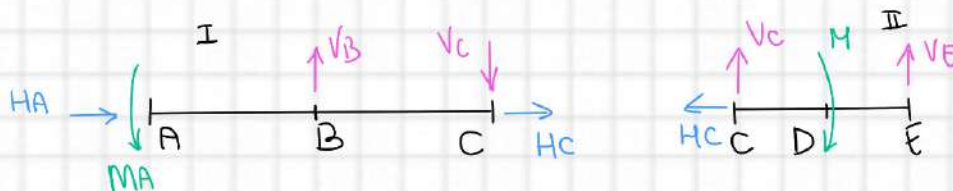
$$\sum F_y = 0 \quad F - F \quad \text{OK!}$$

$$\sum M_A = 0 \quad \frac{F l}{2} - \frac{F l}{2} \quad \text{OK!}$$

ESERCIZIO 4: Fare l'analisi statica della seguente struttura.



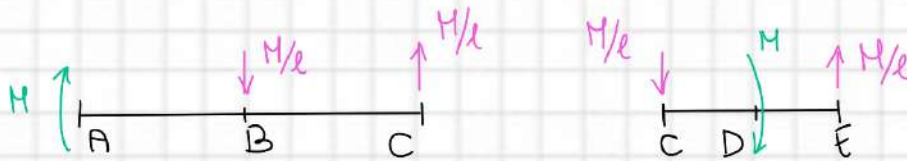
Reazioni vincolari



Equazioni di equilibrio (polo A)

$$\begin{cases} H_A - H_C = 0 \\ V_B - V_C = 0 \\ M_A + V_B l - V_C 2l = 0 \\ -H_C = 0 \\ V_C + V_E = 0 \\ V_C 2l - M + V_E 3l = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_B = V_C \\ M_A = V_B 2l - V_C l = V_B l \\ H_C = 0 \\ V_E = -V_C \\ V_C 2l - V_C 3l = M \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_B = V_C \\ M_A = V_B l \\ H_C = 0 \\ V_E = -V_C \\ V_C = -\frac{M}{l} \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_B = -\frac{M}{2l} \\ M_A = -M \\ H_C = 0 \\ V_E = \frac{M}{l} \\ V_C = -\frac{M}{l} \end{cases}$$

Struttura con reazioni vincolari



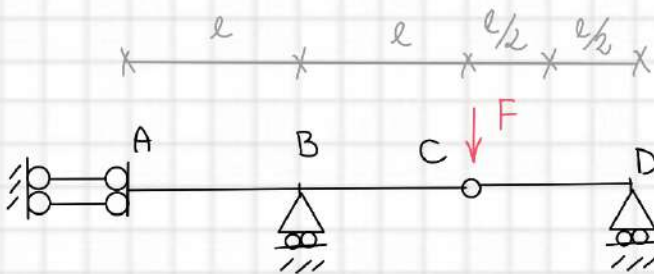
Verifica

$$\sum F_x = 0 \quad \text{OK!}$$

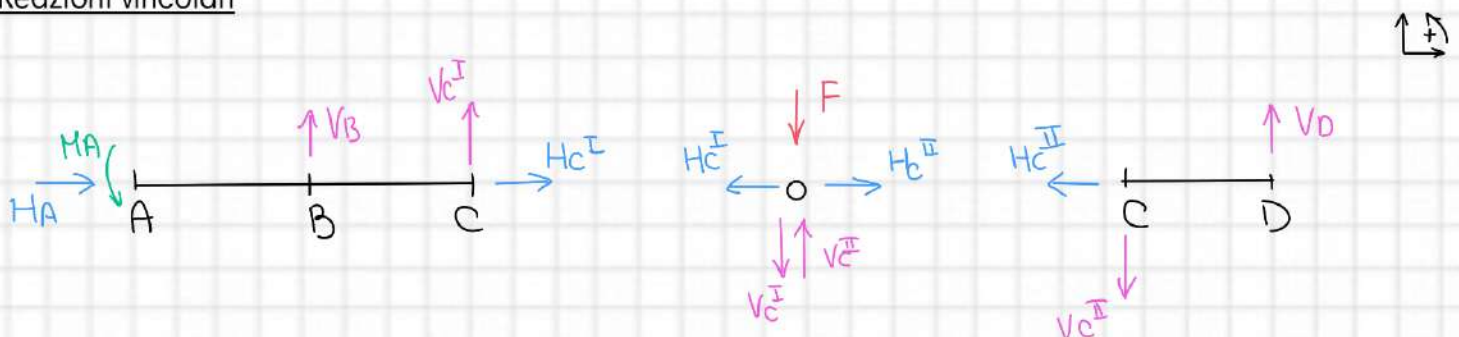
$$\sum F_y = 0 \quad -\frac{M}{l} + \frac{M}{l} - \frac{M}{l} + \frac{M}{l} \quad \text{OK!}$$

$$\sum M_A = 0 \quad -M - \frac{M}{l} l + \frac{M}{l} 2l - \frac{M}{l} 2l - M + \frac{M}{l} 3l \quad \text{OK!}$$

ESERCIZIO 5: Fare l'analisi statica della seguente struttura considerando 3 tratti.



Reazioni vincolari



Equazioni di equilibrio (polo A)

$$\begin{cases} H_A + H_C^I = 0 \\ V_B + V_C^I = 0 \\ M_A + V_B l + V_C^I 2l = 0 \\ -H_C^I + H_C^{II} = 0 \\ -V_C^I - F + V_C^{II} = 0 \\ -H_C^{II} = 0 \\ -V_C^{II} + V_D = 0 \\ -V_C^{II} 2l + V_D 3l = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_B = -V_C^I \\ M_A = -V_C^I 2l + V_C^I l \\ H_C^I = 0 \\ V_C^{II} = V_C^I + F \\ H_C^{II} = 0 \\ V_C^{II} = V_D \\ -V_D 2l + V_D 3l = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_B = -F \\ M_A = -F l \\ H_C^I = 0 \\ V_C^I = -F \\ H_C^{II} = 0 \\ V_C^{II} = 0 \\ V_D = 0 \end{cases}$$

Struttura con reazioni vincolari



Verifica

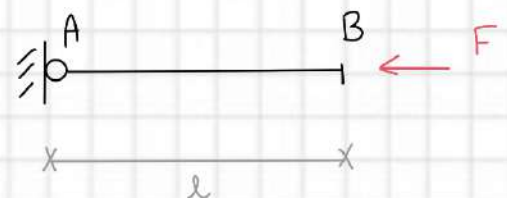
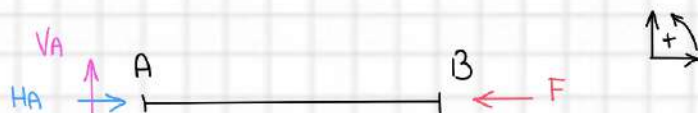
$$\sum F_x = 0 \quad \text{ok!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad -F + F + F - F \quad \text{ok!}$$

$$\sum M_A = 0 \quad -Fl - Fl + F2l + F2l - F2l \quad \text{ok!}$$

ESERCIZIO 6: Verificare l'equilibrio della seguente struttura.

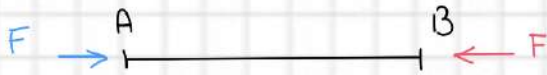
Reazioni vincolari



Equazioni di equilibrio (polo B)

$$\begin{cases} H_A - F = 0 \\ V_A = 0 \\ -V_A l = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = F \\ V_A = 0 \\ -V_A l = 0 \end{cases}$$

Struttura con reazioni vincolari



Verifica

$$\sum F_x = 0 \quad F - F \quad \text{Ok!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \text{Ok!}$$

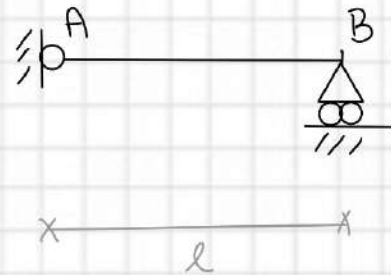
$$\sum M_B = 0 \quad \text{Ok!}$$

ESERCIZIO 7: Studiare la cinematica con il metodo analitico e la statica della seguente struttura. Si verifichi che $A^T = B$.

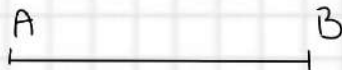
ANALISI CINEMATICA

$$3t - s = 3 - 3 = 0$$

$$l - i = 0 \rightarrow \text{situazione ambigua}$$



Struttura senza vincoli



Gdl

$$U_A, N_A, \phi_A$$

Equazioni di vincolo

vincolo cerniera in A

$$U_A = 0$$

$$N_A = 0$$

vincolo carrello a scorrimento orizzontale in B

$$N_B = 0$$

Equazioni di vincolo in funzione dei gdl

$$\begin{cases} U_A = 0 & \text{Ok} \\ N_A = 0 & \text{Ok} \\ N_B = N_A + \phi_A l = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_A = 0 \\ N_A = 0 \\ N_A + \phi_A l = 0 \end{cases}$$

Sistema lineare

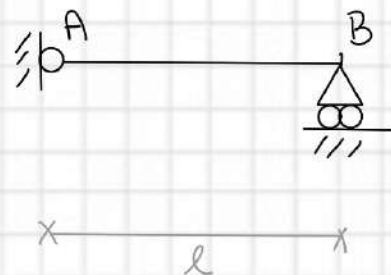
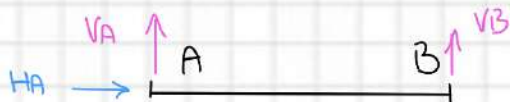
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_A \\ V_A \\ \Phi_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & l \end{bmatrix} = l \neq 0$$

$$l = \dim(A) - r(A) = 0 \rightarrow \text{struttura isostatica}$$

ANALISI STATICA

Reazioni vincolari



Equazioni di equilibrio (polo A)

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + V_B = 0 \\ V_B l = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_A \\ V_A \\ V_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A sistema si ottiene:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & l \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T = B \quad \checkmark$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 8: Studiare cinematica e statica della seguente figura nei 4 diversi casi.

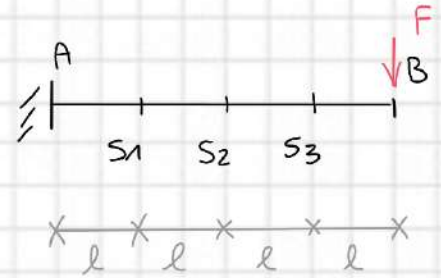
1)

ANALISI CINEMATICA

Struttura senza vincoli



$$3t - S = 6 - 6 = 0$$



Gdl

$$U_A, N_A, \phi_A, U_B, N_B, \phi_B$$

Equazioni di vincolo

vincolo incastro in A

$$U_A = 0$$

$$N_A = 0$$

$$\phi_A = 0$$

vincolo incastro interno in S2

$$U_{S2}^I = U_{S2}^{II}$$

$$N_{S2}^I = N_{S2}^{II}$$

$$\phi_{S2}^I = \phi_{S2}^{II}$$

Equazioni di vincolo in funzione dei gdl

$$\left\{ \begin{array}{l} U_A = 0 \quad OK \\ N_A = 0 \quad OK \\ \phi_A = 0 \quad OK \\ U_{S2}^I - U_{S2}^{II} = U_A - U_B = 0 \\ N_{S2}^I - N_{S2}^{II} = N_A - N_B = 0 \\ \phi_{S2}^I - \phi_{S2}^{II} = \phi_A - \phi_B = 0 \end{array} \right.$$

Sistema lineare

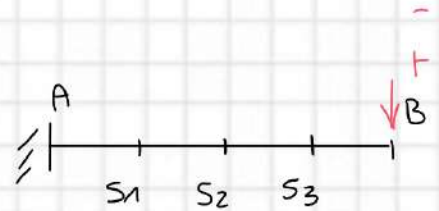
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_A \\ V_A \\ \Phi_A \\ U_B \\ V_B \\ \Phi_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

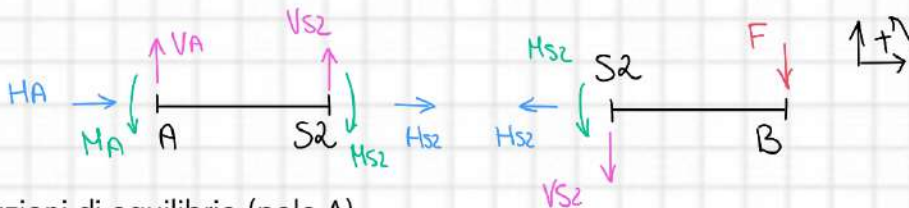
$$\lambda = \dim(A) - \text{rg}(A) = 0$$

→ struttura isostatica

ANALISI STATICA



Reazioni vincolari

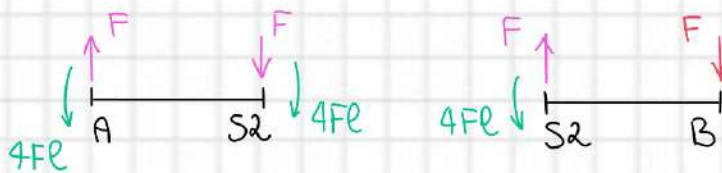


Equazioni di equilibrio (polo A)

$$\begin{cases} H_A + H_{S2} = 0 \\ V_A + V_{S2} = 0 \\ M_A - M_{S2} = 0 \\ H_{S2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = -V_{S2} \\ M_A = M_{S2} \\ H_{S2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = F \\ M_A = 4FL \end{cases}$$

$$\begin{cases} -V_{S2} - F = 0 \\ M_{S2} - F4\ell = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} V_{S2} = -F \\ M_{S2} = 4F\ell \end{cases} \quad \begin{cases} V_{S2} = -F \\ M_{S2} = 4F\ell \end{cases}$$

Struttura con reazioni vincolari



Verifica

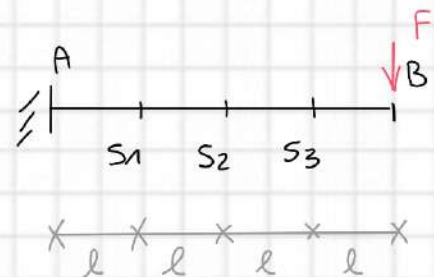
$$\sum F_x = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad F - F + F - F \quad \text{OK!}$$

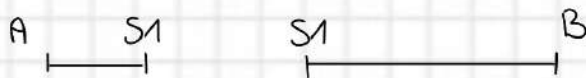
$$\sum M_A = 0 \quad 4F\ell - 4F\ell + 4F\ell - F4\ell \quad \text{OK!}$$

2)

ANALISI CINEMATICA



Struttura senza vincoli



$$3t - s = 6 - 6 = 0$$

Gdl

$$U_A, N_A, \phi_A, U_B, N_B, \phi_B$$

Equazioni di vincolo

vincolo incastro in A

$$U_A = 0$$

$$N_A = 0$$

$$\phi_A = 0$$

vincolo incastro interno in S1

$$U_{S1}^I = U_{S1}^{II}$$

$$N_{S1}^I = N_{S1}^{II}$$

$$\phi_{S1}^I = \phi_{S1}^{II}$$

Equazioni di vincolo in funzione dei gdl

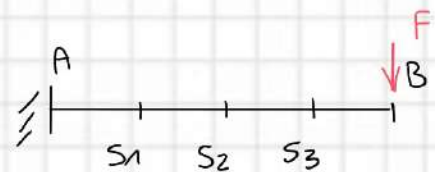
$$\begin{cases} U_A = 0 \quad OK \\ N_A = 0 \quad OK \\ \phi_A = 0 \quad OK \\ U_{S1}^I - U_{S1}^{II} = U_A - U_B = 0 \\ N_{S1}^I - N_{S1}^{II} = N_A - N_B = 0 \\ \phi_{S1}^I - \phi_{S1}^{II} = \phi_A - \phi_B = 0 \end{cases}$$

Sistema lineare

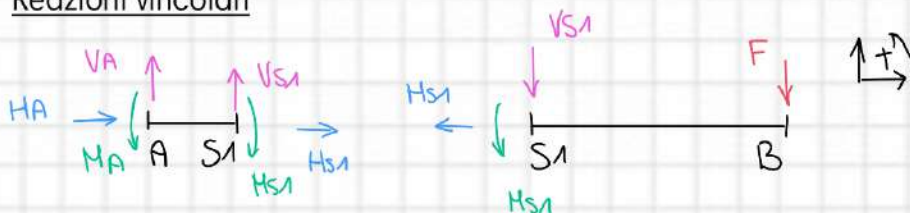
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_A \\ N_A \\ \phi_A \\ U_B \\ N_B \\ \phi_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda = \dim(A) - \text{rg}(A) = 0 \quad \rightarrow \text{struttura isostatica}$$

ANALISI STATICA



Reazioni vincolari

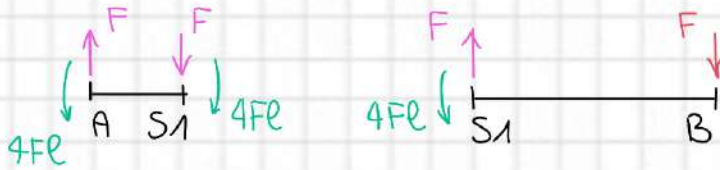


Equazioni di equilibrio (polo A)

$$\begin{cases} H_A + H_{S1} = 0 \\ V_A + V_{S1} = 0 \\ M_A - M_{S1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = -V_{S1} \\ M_A = M_{S1} \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = F \\ M_A = 4Fe \end{cases}$$

$$\begin{cases} -V_{S1} - F = 0 \\ M_{S1} - F4\ell = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} V_{S1} = -F \\ M_{S1} = 4F\ell \end{cases} \quad \begin{cases} V_{S1} = -F \\ M_{S1} = 4F\ell \end{cases}$$

Struttura con reazioni vincolari



Verifica

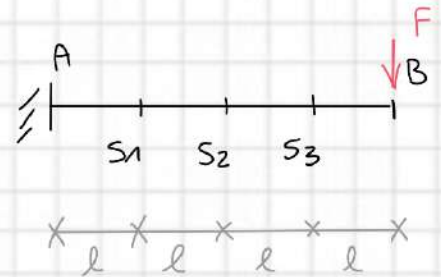
$$\sum F_x = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad F - F + F - F \quad \text{OK!}$$

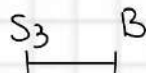
$$\sum M_A = 0 \quad 4F\ell - 4F\ell + 4F\ell - F4\ell \quad \text{OK!}$$

3)

ANALISI CINEMATICA



Struttura senza vincoli



$$3t - s = 6 - 6 = 0$$

Gdl

$$u_A, n_A, \phi_A, u_B, n_B, \phi_B$$

Equazioni di vincolo

vincolo incastro in A

$$u_A = 0$$

$$n_A = 0$$

$$\phi_A = 0$$

vincolo incastro interno in S3

$$u_{S3}^I = u_{S3}^{II}$$

$$n_{S3}^I = n_{S3}^{II}$$

$$\phi_{S3}^I = \phi_{S3}^{II}$$

Equazioni di vincolo in funzione dei gdl

$$\begin{cases} U_A = 0 \quad \text{OK} \\ N_A = 0 \quad \text{OK} \\ \phi_A = 0 \quad \text{OK} \\ U_{S3}^I - U_{S3}^{II} = U_A - U_B = 0 \\ N_{S3}^I - N_{S3}^{II} = N_A - N_B = 0 \\ \phi_{S3}^I - \phi_{S3}^{II} = \phi_A - \phi_B = 0 \end{cases}$$

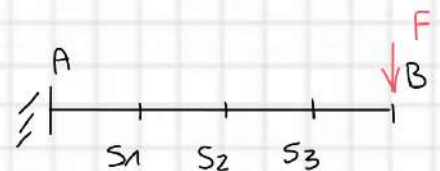
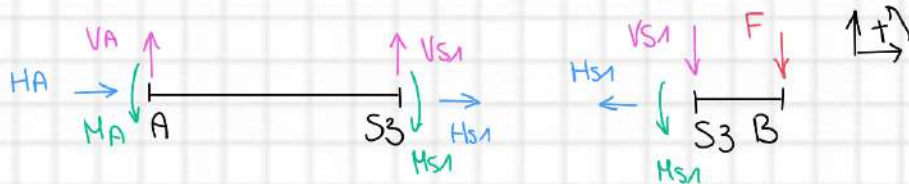
Sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A \\ N_A \\ \phi_A \\ U_B \\ N_B \\ \phi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \dim(A) - \text{rg}(A) = 0 \quad \rightarrow \text{struttura isostatica}$$

ANALISI STATICA

Reazioni vincolari

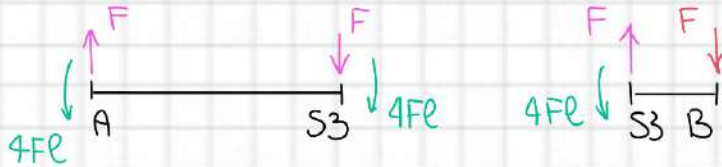


Equazioni di equilibrio (polo A)

$$\begin{cases} H_A + H_{S3} = 0 \\ V_A + V_{S3} = 0 \\ M_A - N_{S3} = 0 \\ H_{S3} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = -V_{S3} \\ M_A = N_{S3} \\ H_{S3} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = F \\ M_A = 4Fe \end{cases}$$

$$\begin{cases} -V_{S3} - F = 0 \\ M_{S3} - F4\ell = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} V_{S3} = -F \\ M_{S3} = 4F\ell \end{cases} \quad \begin{cases} V_{S3} = -F \\ M_{S3} = 4F\ell \end{cases}$$

Struttura con reazioni vincolari



Verifica

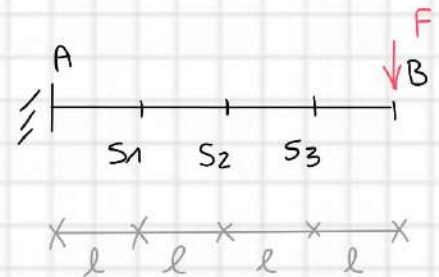
$$\sum F_x = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad F - F + F - F \quad \text{OK!}$$

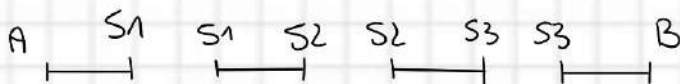
$$\sum M_A = 0 \quad 4F\ell - 4F\ell + 4F\ell - F4\ell \quad \text{OK!}$$

4)

ANALISI CINEMATICA



Struttura senza vincoli



$$3\ell - S = 12 - 12 = 0$$

Gdl

$$u_A, n_A, \phi_A, u_{S2}^I, n_{S2}^I, \phi_{S2}^I, u_{S3}^I, n_{S3}^I, \phi_{S3}^I, u_B, n_B, \phi_B$$

Equazioni di vincolo

vincolo incastro in A

$$u_A = 0$$

$$n_A = 0$$

$$\phi_A = 0$$

vincolo incastro interno in S1

$$u_{S1}^I = u_{S1}^{II}$$

$$v_{S1}^I = v_{S1}^{II}$$

$$\phi_{S1}^I = \phi_{S1}^{II}$$

vincolo incastro interno in S2

$$u_{S2}^I = u_{S2}^{II}$$

$$v_{S2}^I = v_{S2}^{II}$$

$$\phi_{S2}^I = \phi_{S2}^{II}$$

vincolo incastro interno in S3

$$u_{S3}^I = u_{S3}^{II}$$

$$v_{S3}^I = v_{S3}^{II}$$

$$\phi_{S3}^I = \phi_{S3}^{II}$$

Equazioni di vincolo in funzione dei gdl

$$\left\{ \begin{array}{l} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \phi_A = 0 \\ u_{S1}^I - u_{S1}^{II} = 0 \\ v_{S1}^I - v_{S1}^{II} = 0 \\ \phi_{S1}^I - \phi_{S1}^{II} = 0 \\ u_{S2}^I - u_{S2}^{II} = 0 \\ v_{S2}^I - v_{S2}^{II} = 0 \\ \phi_{S2}^I - \phi_{S2}^{II} = 0 \\ u_{S3}^I - u_{S3}^{II} = 0 \\ v_{S3}^I - v_{S3}^{II} = 0 \\ \phi_{S3}^I - \phi_{S3}^{II} = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_{S1}^I = u_A \\ u_{S1}^{II} = u_{S2}^I \\ u_{S2}^I = u_{S1}^{II} \\ u_{S2}^{II} = u_{S3}^I \\ u_{S3}^I = u_{S2}^{II} \\ u_{S3}^{II} = u_B \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \phi_A = 0 \\ u_A - u_{S2}^I = 0 \\ v_A - v_{S2}^I = 0 \\ \phi_A - \phi_{S2}^I = 0 \\ u_{S2}^I - u_{S3}^I = 0 \\ v_{S2}^I - v_{S3}^I = 0 \\ \phi_{S2}^I - \phi_{S3}^I = 0 \\ u_{S3}^I - u_B = 0 \\ v_{S3}^I - v_B = 0 \\ \phi_{S3}^I - \phi_B = 0 \end{array} \right.$$

Sistema lineare

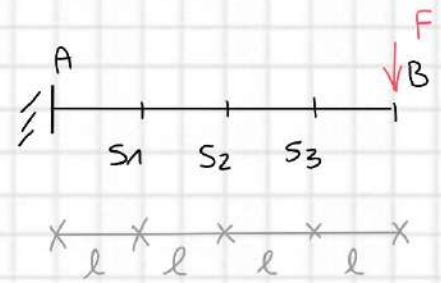
$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1
 \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix}
 U_A \\
 N_A \\
 \Phi_A \\
 U_{S2}^I \\
 N_{S2}^I \\
 \Phi_{S2}^I \\
 U_{S3}^I \\
 N_{S3}^I \\
 \Phi_{S3}^I \\
 U_B \\
 N_B \\
 \Phi_B
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1
 \end{bmatrix} \neq 0$$

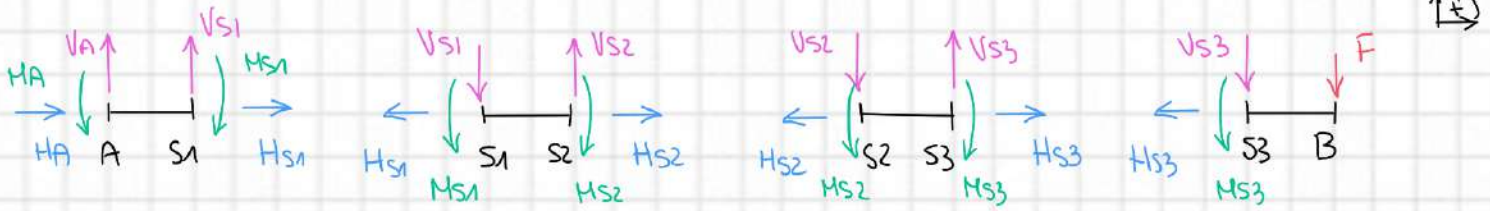
$$\lambda = \dim(A) - \text{rg}(A) = 0$$

→ struttura isostatica

ANALISI STATICA



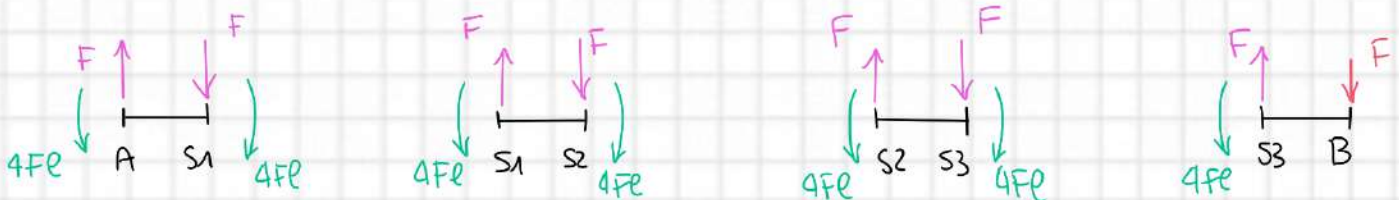
Reazioni vincolari



Equazioni di equilibrio (polo A)

$$\left\{ \begin{array}{l} H_A + H_{S1} = 0 \\ V_A + V_{S1} = 0 \\ M_A - M_{S1} = 0 \\ -H_{S1} + H_{S2} = 0 \\ -V_{S1} + V_{S2} = 0 \\ M_{S1} - M_{S2} = 0 \\ -H_{S2} + H_{S3} = 0 \\ -V_{S2} + V_{S3} = 0 \\ M_{S2} - M_{S3} = 0 \\ -H_{S3} = 0 \\ -V_{S3} - F = 0 \\ M_{S3} - F \cdot 4l = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_A = 0 \\ V_A = -V_{S1} \\ M_A = M_{S1} \\ H_{S1} = 0 \\ V_{S1} = V_{S2} \\ M_{S1} = M_{S2} \\ H_{S2} = 0 \\ V_{S2} = V_{S3} \\ M_{S2} = M_{S3} \\ H_{S3} = 0 \\ V_{S3} = -F \\ M_{S3} = 4Fl \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_A = 0 \\ V_A = F \\ M_A = 4Fl \\ H_{S1} = 0 \\ V_{S1} = -F \\ M_{S1} = 4Fl \\ H_{S2} = 0 \\ V_{S2} = -F \\ M_{S2} = 4Fl \\ H_{S3} = 0 \\ V_{S3} = -F \\ M_{S3} = 4Fl \end{array} \right.$$

Struttura con reazioni vincolari



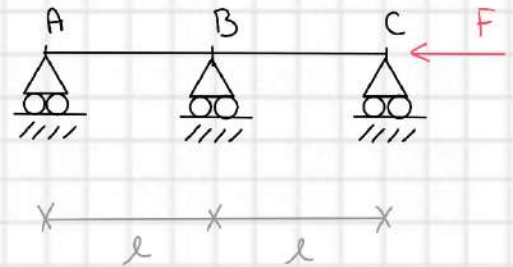
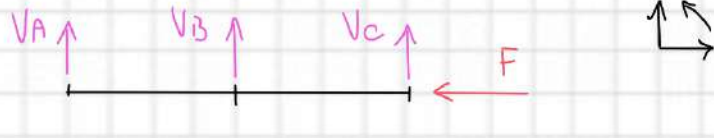
Verifica

$$\sum F_x = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad F - F + F - F + F - F + F - F \quad \text{OK!}$$

ESERCIZIO 9: Trovare l'equilibrio della seguente struttura.

Reazioni vincolari

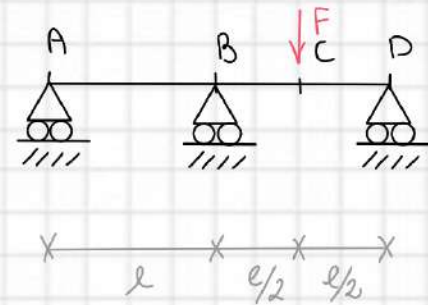
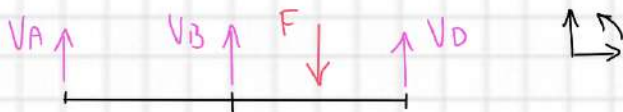


Equazioni di equilibrio (polo A)

$$\begin{cases} -F = 0 \\ V_A + V_B + V_C = 0 \\ V_B l + V_C 2l = 0 \end{cases} \rightarrow \text{si ha equilibrio se non viene esercitata alcuna forza}$$

ESERCIZIO 10: Trovare l'equilibrio della seguente struttura.

Reazioni vincolari



Equazioni di equilibrio (polo A)

$$\begin{cases} V_A + V_B - F + V_D = 0 \\ V_B l - F \frac{3}{4} l + V_D l = 0 \end{cases}$$

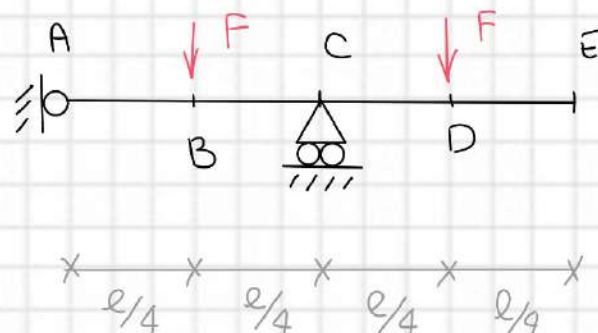
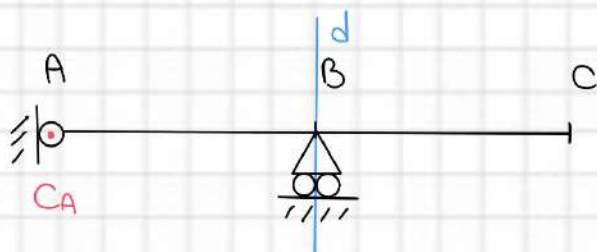
$\rightarrow 2 \text{ equazioni, } 3 \text{ incognite} \Rightarrow \text{irrisolvibile}$

ESERCIZIO 1: Fare l'analisi cinematica e statica della seguente struttura.ANALISI CINEMATICAFormula $[3t - s = l - i]$

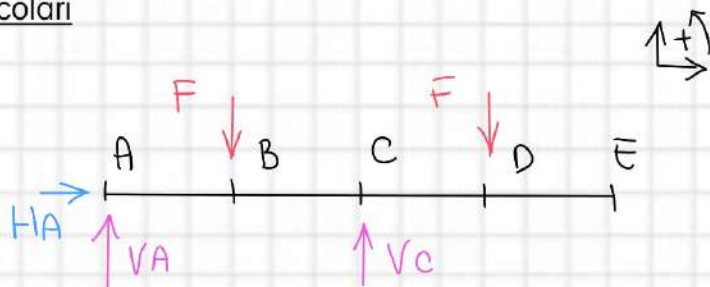
$$t = 1$$

$$\Rightarrow 3t - s = 0 \Rightarrow l - i = 0$$

$$s = 3$$

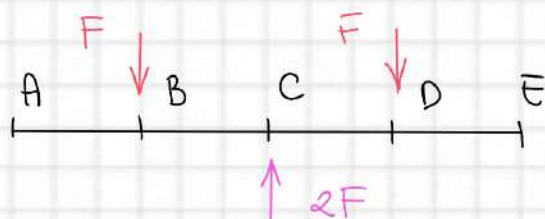
Metodo grafico [centri di rotazione]

il centro di rotazione di B non passa per A $\Rightarrow$ struttura isostatica

ANALISI STATICAreazioni vincolariequazioni di equilibrio (polo A)

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + V_C - 2F = 0 \\ -F\frac{l}{4} + V_C\frac{l}{2} - F\frac{3l}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = 0 \\ V_C = 2F \end{cases}$$

struttura con reazioni vincolariverifica

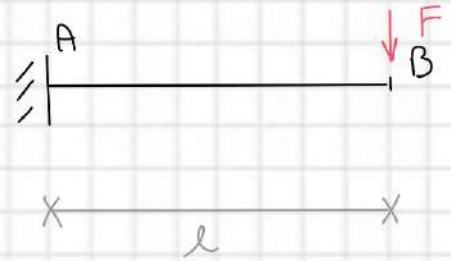
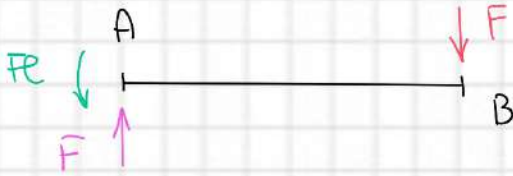
$$\sum F_x = 0 \quad \text{ok!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad 2F - F - F = 0 \quad \text{ok!}$$

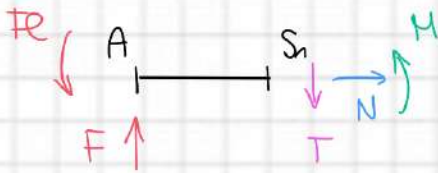
$$\sum M_E = 0 \quad F\frac{l}{4} - 2F\frac{l}{2} + F\frac{3l}{4} = 0 \quad \text{ok!}$$

ESERCIZIO 2: Calcolare lo sforzo normale e flettente della seguente struttura.

ANALISI STATICA

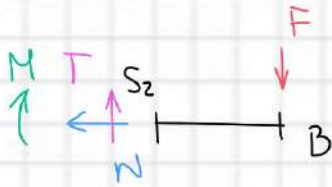


CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE



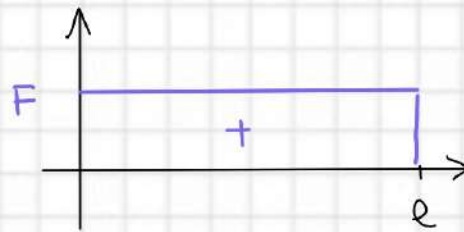
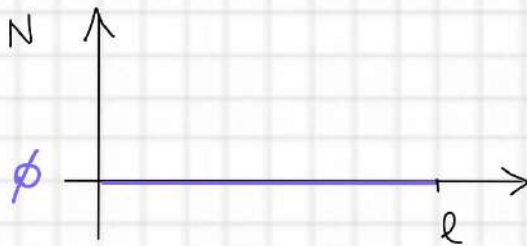
$$\begin{cases} N = 0 \\ -T + F = 0 \\ M + Fx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = 0 \\ T = F \\ M = -Fx \end{cases}$$



$$\begin{cases} N = 0 \\ T - F = 0 \\ -M - Fx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = 0 \\ T = F \\ M = -Fx \end{cases}$$



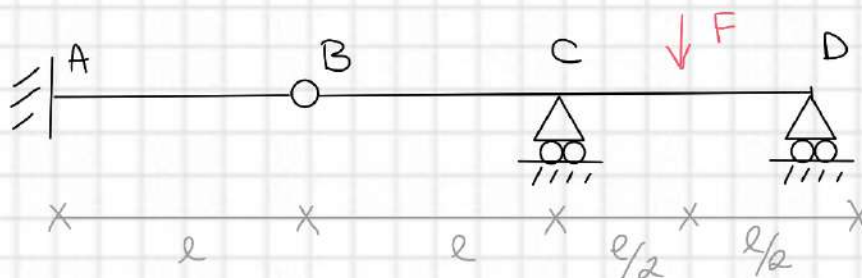
ESERCIZIO 1: Fare l'analisi cinematica e statica della seguente struttura.ANALISI CINEMATICAFormula $[3t - s = I - i]$

$$t = 2$$

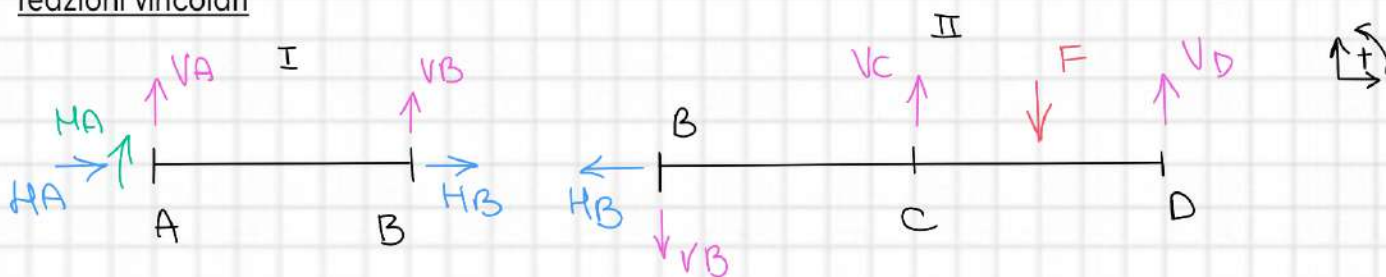
$$s = 7$$

$$\Rightarrow 3t - s = 6 - 7 = -1$$

$$\Rightarrow (-1) < 0 \rightarrow \text{struttura ipervincolata}$$

ANALISI STATICA

reazioni vincolari



equazioni di equilibrio (polo A tratto I - polo B tratto II)

$$\left\{ \begin{array}{l} H_A + H_B = 0 \\ V_A + V_B = 0 \\ -M_A + V_B l = 0 \\ H_A = 0 \\ V_A + V_C - F + V_D = 0 \\ -M_A + 2lV_C - \frac{5}{2}lF + 3lV_D = 0 \end{array} \right.$$

$$H_B = 0$$

$$V_A = -V_B$$

$$M_A = V_B l$$

$$H_A = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -V_B + V_C - F + V_D = 0 \\ -V_B l + 2lV_C - \frac{5}{2}lF + 3lV_D = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_B = V_C - F + V_D \\ V_B = 2lV_C - \frac{5}{2}lF + 3lV_D \end{array} \right.$$

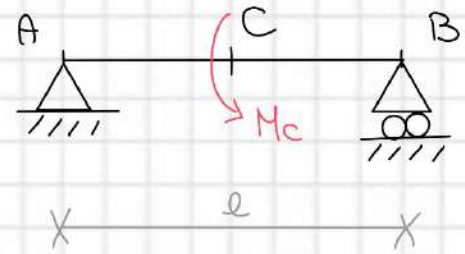
$$V_C - F + V_D = 2lV_C - \frac{5}{2}lF + 3lV_D$$

1 equazione, 2 incognite

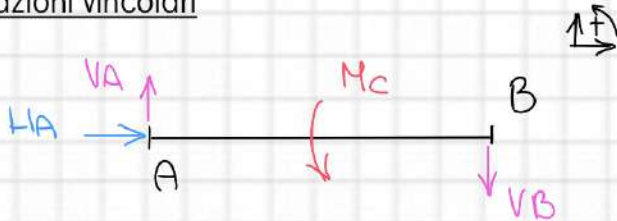
ESERCIZIO 2: Si determinino le reazioni vincolari per le seguenti strutture, tracciando anche i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione.

1)

ANALISI STATICA



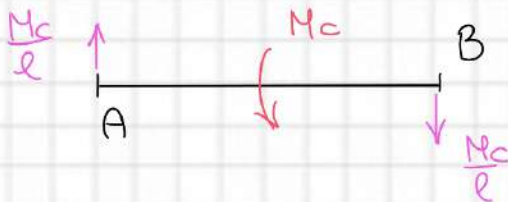
reazioni vincolari



equazioni di equilibrio (polo A)

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A - V_B = 0 \\ M_C - V_B l = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = \frac{M_C}{l} \\ V_B = \frac{M_C}{l} \end{cases}$$

struttura con reazioni vincolari



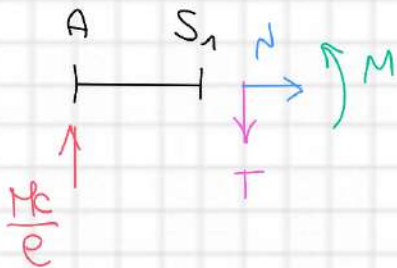
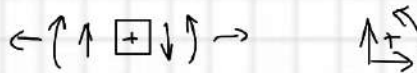
verifica

$$\sum F_x = 0 \quad \text{ok!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \frac{M_C}{l} - \frac{M_C}{l} = 0 \quad \text{ok!}$$

$$\sum M_B = 0 \quad M_C - \frac{M_C}{l} l = 0 \quad \text{ok!}$$

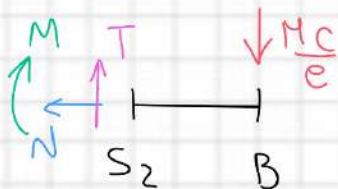
CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE



$$\begin{cases} N = 0 \\ -T + \frac{M_C}{l} = 0 \\ M - T x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = 0 \\ T = \frac{M_C}{l} \\ M = \frac{M_C}{l} x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M(0) &= 0 \\ M\left(\frac{l}{2}\right) &= \frac{M_C}{2} \end{aligned}$$

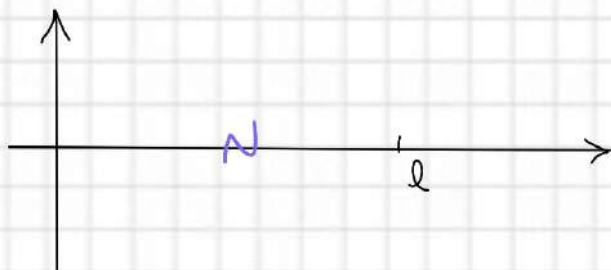


$$\begin{cases} -N = 0 \\ T - \frac{M_C}{l} = 0 \\ -M - T x = 0 \end{cases}$$

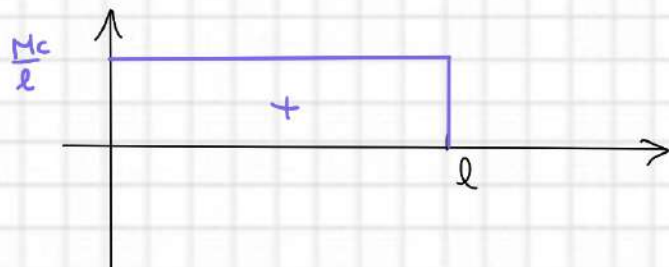
$$\begin{cases} N = 0 \\ T = \frac{M_C}{l} \\ M = -\frac{M_C}{l} x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M(0) &= 0 \\ M\left(\frac{l}{2}\right) &= -\frac{M_C}{2} \end{aligned}$$

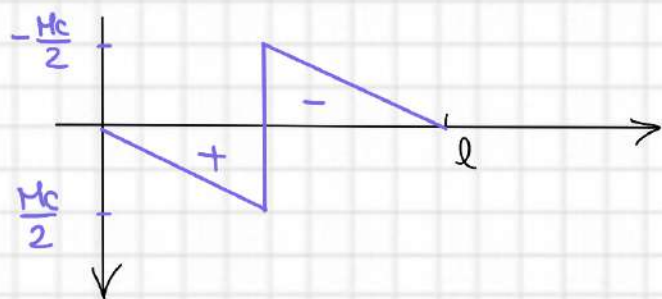
N)



T)

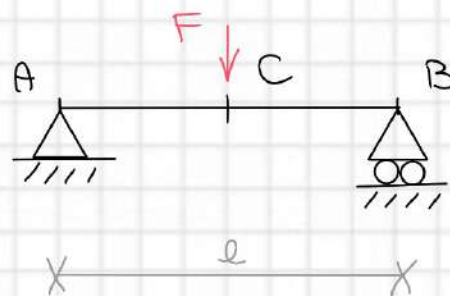


M)

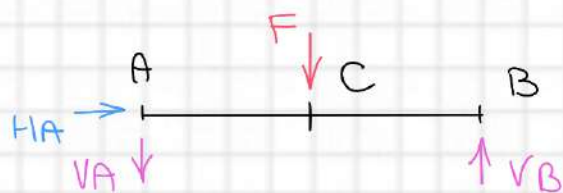


2)

ANALISI STATICA



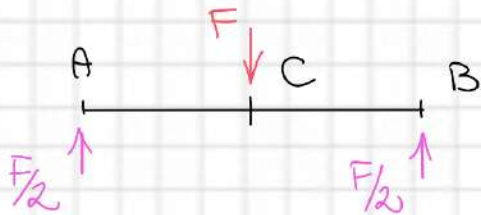
reazioni vincolari



equazioni di equilibrio (polo A)

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ -V_A - F + V_B = 0 \\ -F \frac{l}{2} + V_B l = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = -\frac{F}{2} \\ V_B = \frac{F}{2} \end{cases}$$

struttura con reazioni vincolari



verifica

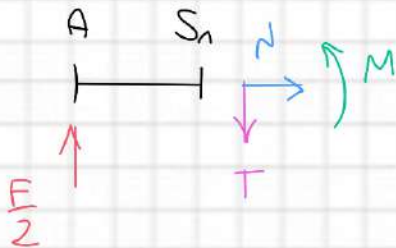
$$\sum F_x = 0 \quad \text{ok!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \frac{F}{2} - F + \frac{F}{2} = 0 \quad \text{ok!}$$

$$\sum M_B = 0 \quad \frac{F\ell}{2} - F\ell = 0 \quad \text{ok!}$$

CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

← (↑ ⊕ ↓) → ↗ ↘

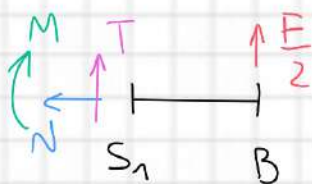


$$\begin{cases} N = 0 \\ -T + \frac{F}{2} = 0 \\ M - Tx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = 0 \\ T = \frac{F}{2} \\ M = \frac{F}{2}x \end{cases}$$

$$M(0) = 0$$

$$M\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{F\ell}{4}$$



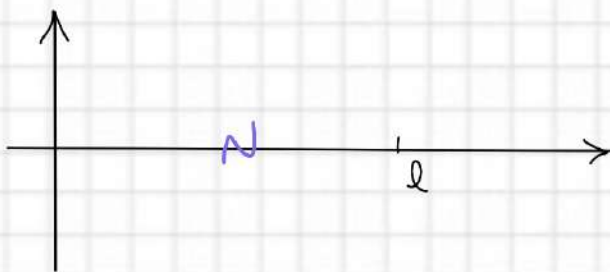
$$\begin{cases} -N = 0 \\ T + \frac{F}{2} = 0 \\ -M - Tx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = 0 \\ T = -\frac{F}{2} \\ M = \frac{F}{2}x \end{cases}$$

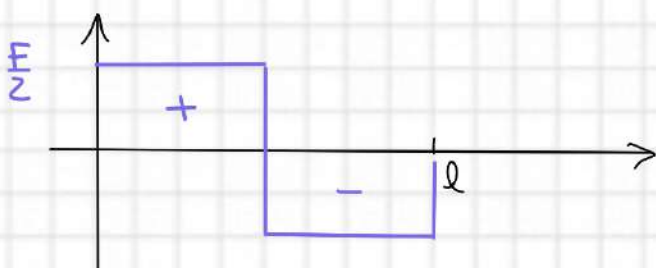
$$M(0) = 0$$

$$M\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{F\ell}{4}$$

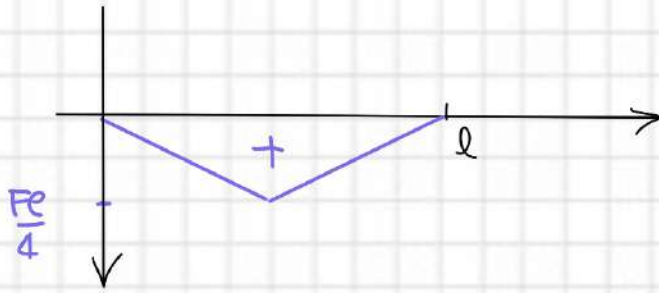
N)



T)



M)



ESERCIZIO 1: Cercare prove per testare i materiali.

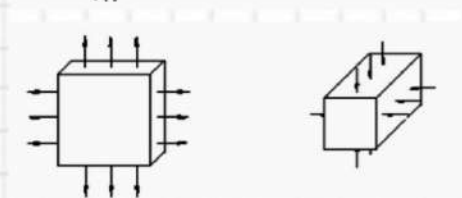
Prove uniassiali

Prove di trazione o compressione lungo un asse del provino.



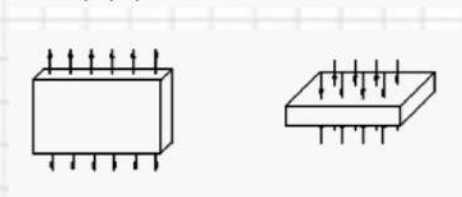
Prove biassiali

Prove di trazione o compressione lungo due assi del provino.



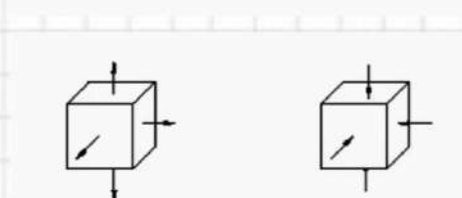
Prove planari

Prove di trazione o compressione lungo un piano del provino.



Prova volumetrica

Prove di trazione o compressione tre piani del provino.



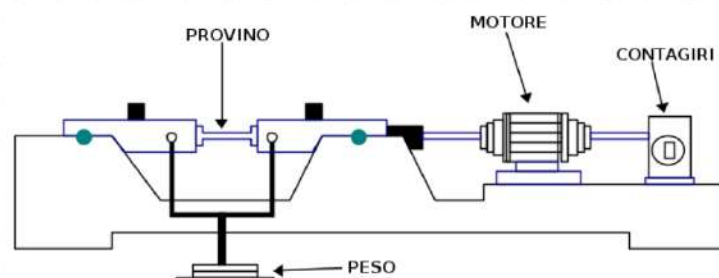
Prova di flessione

Misura la capacità di un materiale di essere curvato. La determinazione richiede l'applicazione di un carico, con una specificata velocità, al centro di un provino, posizionato di piatto come trave semplice su due supporti e la registrazione della curva carico-spostamento.



Prova di fatica

Il provino viene sottoposto a carico ciclico.



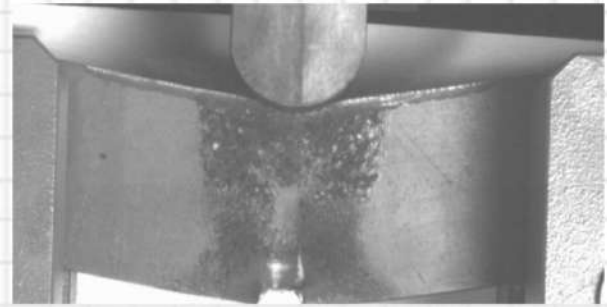
Prova di impatto

Fornisce informazioni sul comportamento di materiali soggetti a carico rapido e alle diverse temperature poiché il comportamento della frattura dipende dalla temperatura.



Test di caduta

Viene valutato l'aspetto delle superfici di frattura quando un peso cade su un provino da una determinata altezza. L'analisi, visiva permette poi di identificare le proprietà del materiale (duttilità, fragilità).



ESERCIZIO 2: Cercare la classificazione dei materiali.

- Materiali metallici: costituiti da metalli e loro leghe; le loro principali proprietà sono la lucentezza, la malleabilità e l'elevata conducibilità elettrica e termica.
- Materiali ceramici: sono materiali inorganici in genere fragili e resistenti a temperature molto elevate.
- Materiali polimerici: dal punto di vista della struttura molecolare, sono costituiti principalmente da polimeri (che sono molecole dal peso elevatissimo generate da lunghissime sequenze, dette unità ripetitive), a cui possono essere aggiunti additivi.
- Materiali compositi: costituiti da due o più materiali semplici.

ESERCIZIO 3: In 80 anni quante volte batte il cuore?

In condizioni di riposo la frequenza del battito del cuore è compresa tra 60 e 100 pulsazioni al minuto; consideriamo una media di 80 battiti al minuto.

80 corrispondono a circa $80 * 60 * 24 * 365 * 80 = 3363840000$ battiti.

ESERCIZIO 4: Qual è un campo scalare di interesse?

Si intende una quantità che va misurata punto per punto nel corpo. Esempi sono la densità, la temperatura o la composizione chimica.

ESERCIZIO 1: Assumendo un sistema di riferimento $(0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, si esprima la seguente relazione in notazione compatta, indiciale e ingegneristica:

$$\mathbf{x}(P) = \mathbf{x}(P) + \mathbf{u}(P)$$

NOTAZIONE COMPATTA $\mathbf{x}(P) = \mathbf{x}(P) + \mathbf{u}(P)$

NOTAZIONE INDICIALE $x_i = x_i + u_i$

NOTAZIONE INGEGNERISTICA
$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

ESERCIZIO 2: Assumendo un SR $(0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, si esprima la seguente relazione in notazione compatta, indiciale e ingegneristica:

$$u(P) = u(P_0) + H dx$$

NOTAZIONE COMPATTA $u(P) = u(P_0) + H dx$

NOTAZIONE INDICIALE $u_i(P) = u_i(P_0) + H_{ij} dx_j$

NOTAZIONE INGEGNERISTICA

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

Sapendo che $H = \nabla_x u$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dx} & \frac{du_1}{dy} & \frac{du_1}{dz} \\ \frac{du_2}{dx} & \frac{du_2}{dy} & \frac{du_2}{dz} \\ \frac{du_3}{dx} & \frac{du_3}{dy} & \frac{du_3}{dz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1 = u_{01} + \frac{du_1}{dx} dx + \frac{du_1}{dy} dy + \frac{du_1}{dz} dz \\ u_2 = u_{02} + \frac{du_2}{dx} dx + \frac{du_2}{dy} dy + \frac{du_2}{dz} dz \\ u_3 = u_{03} + \frac{du_3}{dx} dx + \frac{du_3}{dy} dy + \frac{du_3}{dz} dz \end{cases}$$

ESERCIZIO 3: Scrivere una matrice 3x3 emisimmetrica.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 \\ -5 & 0 & 7 \\ 1 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = -A$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & -7 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & -7 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 4: Dimostrare che i tensori A^S e A^E sono rispettivamente simmetrici ed emisimmetrici.

$$\begin{cases} (A^S)^T = A^S \\ A^S = \frac{1}{2} (A + A^T) \end{cases}$$

$$(A^S)^T = \left[\frac{1}{2} (A + A^T) \right]^T = \frac{1}{2} (A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2} (A^T + A) = A^S \quad \text{OK!}$$

$$\begin{cases} (A^E)^T = -A^E \\ A^E = \frac{1}{2} (A - A^T) \end{cases}$$

$$(A^E)^T = \left[\frac{1}{2} (A - A^T) \right]^T = \frac{1}{2} (A^T - A)$$

OK!

$$-A^E = -\frac{1}{2} (A - A^T) = \frac{1}{2} (A^T - A)$$

$$A^S + A^E = \frac{1}{2} (A + A^T) + \frac{1}{2} (A - A^T) = \frac{1}{2} (A + \cancel{A^T} + A - \cancel{A^T}) = \frac{1}{2} \cdot 2A = A$$

ESERCIZIO 5: Calcolare le componenti del tensore delle deformazioni.

$$u = \{u_1, u_2, u_3\} \quad X = \{x, y, z\}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (H + H^T) = \frac{1}{2} (\nabla_x u + (\nabla_x u)^T) = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} + \left(\frac{du}{dx} \right)^T \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dx} & \frac{du_1}{dy} & \frac{du_1}{dz} \\ \frac{du_2}{dx} & \frac{du_2}{dy} & \frac{du_2}{dz} \\ \frac{du_3}{dx} & \frac{du_3}{dy} & \frac{du_3}{dz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dx} & \frac{du_2}{dx} & \frac{du_3}{dx} \\ \frac{du_1}{dy} & \frac{du_2}{dy} & \frac{du_3}{dy} \\ \frac{du_1}{dz} & \frac{du_2}{dz} & \frac{du_3}{dz} \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{2du_1}{dx} & \frac{du_1}{dy} + \frac{du_2}{dx} & \frac{du_1}{dz} + \frac{du_3}{dx} \\ \frac{du_2}{dx} + \frac{du_1}{dy} & \frac{2du_2}{dy} & \frac{du_2}{dz} + \frac{du_3}{dy} \\ \frac{du_3}{dx} + \frac{du_1}{dz} & \frac{du_3}{dy} + \frac{du_2}{dz} & \frac{2du_3}{dz} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{du_1}{dx} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{du_2}{dy} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{du_3}{dz} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_1}{dy} + \frac{du_2}{dx} \right) \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_1}{dz} + \frac{du_3}{dx} \right) \\ \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_2}{dz} + \frac{du_3}{dy} \right) \end{cases}$$

ESERCIZIO 6: Ricavare in forma esplicita

$$\det(\varepsilon - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - \lambda & \frac{1}{2} \delta_{xy} & \frac{1}{2} \delta_{xz} \\ \frac{1}{2} \delta_{xy} & \varepsilon_{yy} - \lambda & \frac{1}{2} \delta_{yz} \\ \frac{1}{2} \delta_{xz} & \frac{1}{2} \delta_{yz} & \varepsilon_{zz} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_{xx} - \lambda) \left[(\varepsilon_{yy} - \lambda)(\varepsilon_{zz} - \lambda) - \left(\frac{1}{4} \delta_{yz}^2 \right) \right] + \\ & - \frac{1}{2} \delta_{xy} \left[\frac{1}{2} \delta_{xy} (\varepsilon_{zz} - \lambda) - \frac{1}{4} \delta_{xz} \delta_{yz} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \delta_{xz} \left[\frac{1}{4} \delta_{xy} \delta_{yz} - \frac{1}{2} \delta_{xz} (\varepsilon_{yy} - \lambda) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = (\varepsilon_{xx} - \lambda) \left[\varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} - \lambda \varepsilon_{yy} - \lambda \varepsilon_{zz} + \lambda^2 - \frac{1}{4} \delta_{yz}^2 \right] + \\ & - \frac{1}{2} \delta_{xy} \left[\frac{1}{2} \varepsilon_{zz} \delta_{xy} - \frac{1}{2} \lambda \delta_{xy} - \frac{1}{4} \delta_{xz} \delta_{yz} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \delta_{xz} \left[\frac{1}{4} \delta_{xy} \delta_{yz} - \frac{1}{2} \delta_{xz} \varepsilon_{yy} + \frac{1}{2} \lambda \delta_{xz} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} - \lambda \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} - \lambda \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} + \lambda^2 \varepsilon_{xx} - \frac{1}{4} \varepsilon_{xx} \delta_{yz}^2 + \\ & - \lambda \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} + \lambda^2 \varepsilon_{yy} + \lambda^2 \varepsilon_{zz} - \lambda^3 + \frac{1}{4} \lambda \delta_{yz}^2 + \\ & - \frac{1}{4} \varepsilon_{zz} \delta_{xy}^2 + \frac{1}{4} \lambda \delta_{xy}^2 + \frac{1}{8} \delta_{xy} \delta_{xz} \delta_{yz} \\ & + \frac{1}{8} \delta_{xy} \delta_{xz} \delta_{yz} - \frac{1}{4} \varepsilon_{yy} \delta_{xz}^2 + \frac{1}{4} \lambda \delta_{xz}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} + \lambda \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \lambda \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - \lambda^2 \varepsilon_{xx} + \frac{1}{4} \varepsilon_{xx} \delta y z^2 + \\
&+ \lambda \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} - \lambda^2 \varepsilon_{yy} - \lambda^2 \varepsilon_{zz} + \lambda^3 - \frac{1}{4} \lambda \delta y z^2 + \\
&+ \frac{1}{4} \varepsilon_{zz} \delta x y^2 - \frac{1}{4} \lambda \delta x y^2 - \frac{1}{8} \delta x y \delta x z \delta y z + \\
&- \frac{1}{8} \delta x y \delta x z \delta y z + \frac{1}{4} \varepsilon_{yy} \delta x z^2 - \frac{1}{4} \lambda \delta x z^2
\end{aligned}$$

$$I_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

$$I_2 = \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} - \frac{1}{4} \delta x y^2 - \frac{1}{4} x z^2 - \frac{1}{4} \delta y z^2$$

$$\begin{aligned}
I_3 = & \frac{1}{4} \varepsilon_{xx} \delta y z^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_{yy} \delta x z^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_{zz} \delta x y^2 - \frac{1}{4} \delta x y \delta y z \delta x z + \\
& - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz}
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 1: Qual è la differenza tra equilibrio nel corpo rigido e nel corpo deformabile?

Nel corpo rigido, le equazioni si riferiscono all'intero corpo mentre nel corpo deformabile devo ragionare su una generica porzione.

ESERCIZIO 2: Verificare che la seguente relazione sia corretta:

Dato un tensore A , le componenti sono date da:

$$A_{ab} = A e_b \cdot e_a$$

$$A_{ab} = A e_b \cdot e_a$$

$$= A_{ij} (e_i \otimes e_j) e_b \cdot e_a$$

$$= A_{ij} (e_b \cdot e_j) e_i \cdot e_a$$

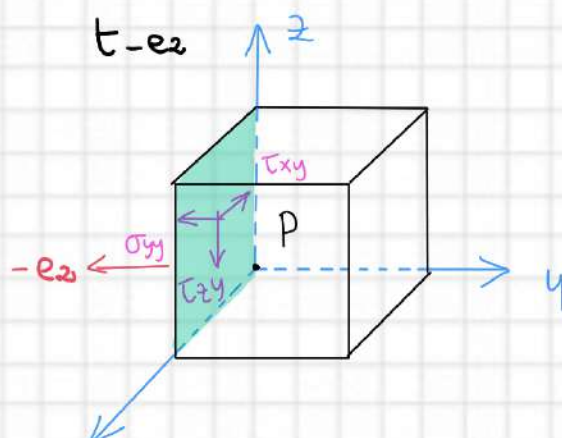
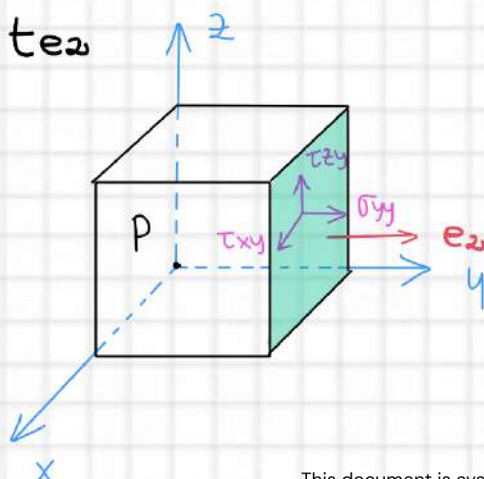
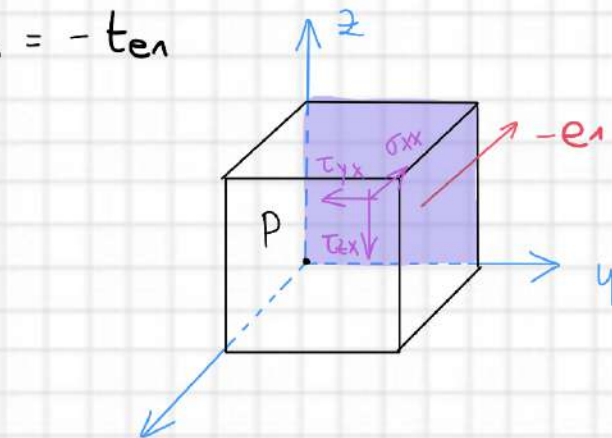
$$= A_{ij} \delta_{bj} \delta_{ia}$$

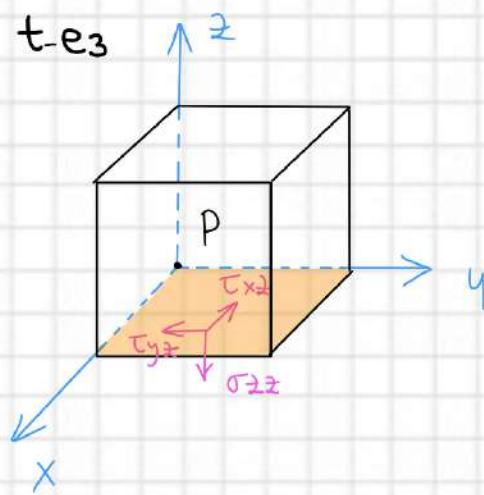
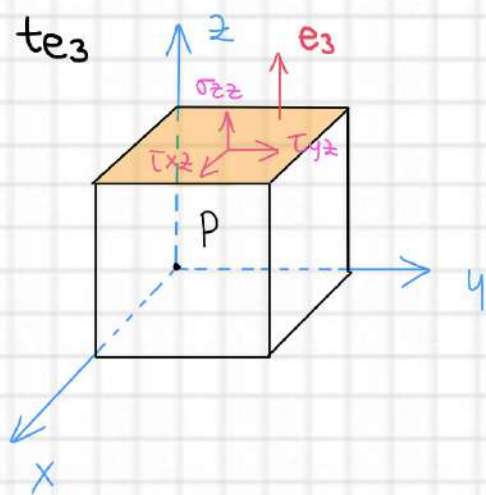
$$= A_{ib} \delta_{ia}$$

$$= A_{ab}$$

ESERCIZIO 3: Considerare il seguente cubetto, disegnare le componenti dei vettori $t_{-e_1}, t_{e_2}, t_{-e_2}, t_{e_3}, t_{-e_3}$

$$t_{-e_1} = -t_{e_1}$$



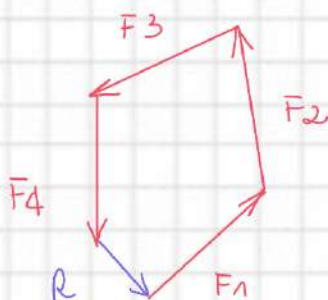
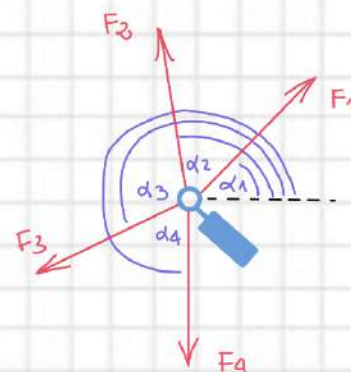


ESERCIZIO 1: Un occhietto è soggetto all'azione di varie forze come illustrato in figura.

$$\begin{array}{ll} F_1 = 12 \text{ kN} & \alpha_1 = 45^\circ \\ F_2 = 8 \text{ kN} & \alpha_2 = 100^\circ \\ F_3 = 18 \text{ kN} & \alpha_3 = 205^\circ \\ F_4 = 4 \text{ kN} & \alpha_4 = 270^\circ \end{array}$$

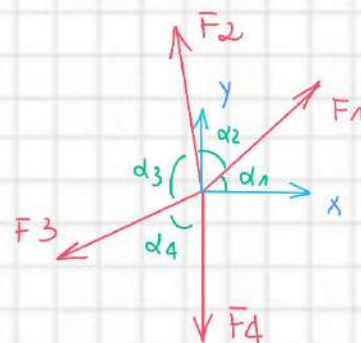
Trovare la risultante usando:

- 1) il metodo grafico
- 2) scomposizione delle forze



Scomposizione delle forze

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{ix} \\ &= F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3 + F_4 \cos \alpha_4 \\ &= 12 \cos 45^\circ + 8 \cos 100^\circ + 18 \cos 205^\circ + 4 \cos 270^\circ \\ &= 8,48 - 1,39 - 16,31 + 0 = -9,22 \text{ kN} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} R_y &= \sum F_{iy} \\ &= F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 + F_3 \sin \alpha_3 + F_4 \sin \alpha_4 \\ &= 12 \sin 45^\circ + 8 \sin 100^\circ + 18 \sin 205^\circ + 4 \sin 270^\circ \\ &= 8,48 + 7,88 - 7,6 - 4 = 4,76 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\|R\| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 10,37 \text{ kN}$$

$$\tan \alpha_R = \frac{R_y}{R_x}$$

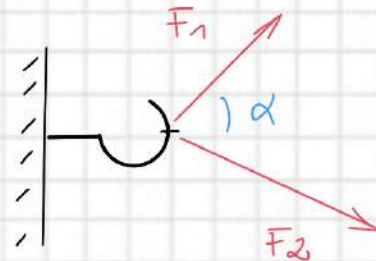
$$= \frac{4,76}{-9,22} = -0,52$$

$$\Rightarrow \alpha_R = \arctan(-0,52) = 152,5^\circ$$

ESERCIZIO 2: Un uncino sostiene due forze che definiscono un angolo α . Supponendo di conoscere:

- i moduli delle forze F_1, F_2
- l'angolo α

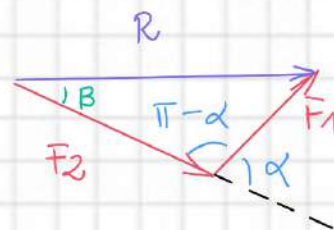
Trovare il modulo della risultante R e la sua direzione.



Uso il teorema di Carnot:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cos(\pi - \alpha)$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cos(\pi - \alpha)}$$



Uso la legge dei seni per trovare l'angolo β

$$\frac{F_1}{\sin(\beta)} = \frac{R}{\sin(\pi - \alpha)}$$

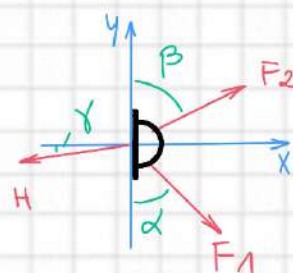
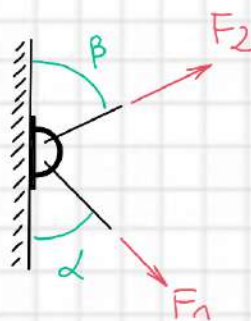
$$\sin \beta = \frac{F_1 \sin(\pi - \alpha)}{R}$$

ESERCIZIO 3: Due cavi attaccati ad un occhiello

Supponendo di conoscere:

- i moduli delle forze F_1 e F_2
- angoli α e β

Trovare il modulo della risultante H e la sua direzione.



$$R_x = \sum F_{ix} = 0$$

$$= F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta - H \cos \gamma = 0$$

$$R_y = \sum F_{iy} = 0$$

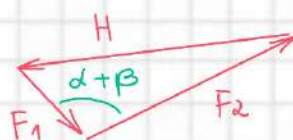
$$= -F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta - H \sin \gamma = 0$$

$$\begin{cases} H \cos \gamma = F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta = H_x \\ H \sin \gamma = -F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta = H_y \end{cases}$$

$$\|H\| = \sqrt{H_x^2 + H_y^2}$$

$$H_x^2 = F_1^2 \sin^2 \alpha + F_2^2 \sin^2 \beta + 2 F_1 F_2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$H_y^2 = F_1^2 \cos^2 \alpha + F_2^2 \cos^2 \beta - 2 F_1 F_2 \cos \alpha \cos \beta$$

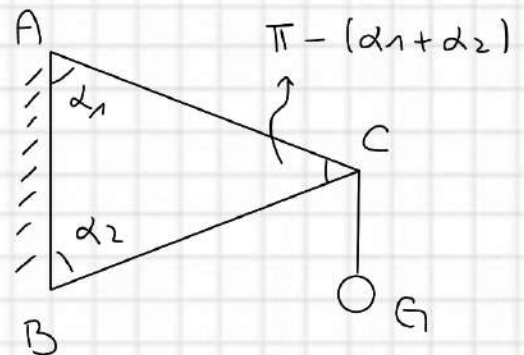
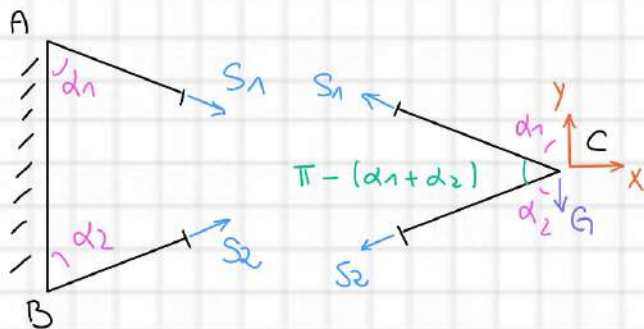


$$\begin{aligned}
 H_x^2 + H_y^2 &= F_1^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + F_2^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) + \\
 &\quad - 2 F_1 F_2 (-\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta) \\
 &= F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cos(\alpha + \beta)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|H\| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cos(\alpha + \beta)}$$

ESERCIZIO 4: Trovare le forze che agiscono sulle barre che sostengono il peso G.

Scompongo così le forze



$$\begin{cases}
 R_x = \sum F_x = 0 \rightarrow -S_1 \sin \alpha_1 - S_2 \sin \alpha_2 = 0 \\
 R_y = \sum F_y = 0 \rightarrow S_1 \cos \alpha_1 - S_2 \cos \alpha_2 - G = 0
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 S_1 = -\frac{S_2 \sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \\
 -\frac{S_2 \sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \cos \alpha_1 - S_2 \cos \alpha_2 - G = 0
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 S_1 = -\frac{S_2 \sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \\
 -S_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - S_2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 = G \sin \alpha_1
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 S_1 = -\frac{S_2 \sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \\
 -S_2 (\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \sin \alpha_1) = G \sin \alpha_1
 \end{cases}$$

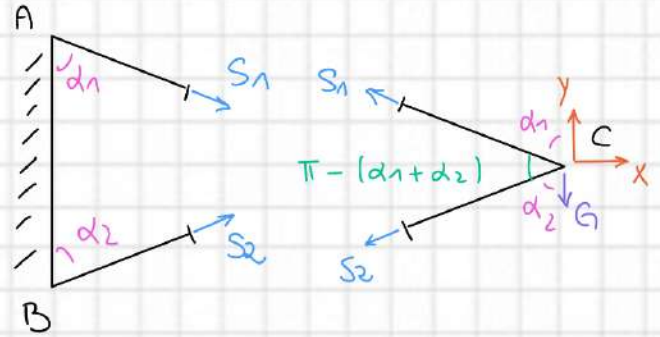
$$\begin{cases}
 S_1 = -\frac{S_2 \sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \\
 -S_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = G \sin \alpha_1
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 S_1 = + \frac{G \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \\
 S_2 = - \frac{G \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}
 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 = \frac{G \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \\ S_2 = -\frac{G \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \end{cases}$$

OSS: Il fatto che venga S_2 negativo, significa che l'ipotesi fatta è scorretta

- Il tratto AC lavora in trazione
- Il tratto BC lavora in compressione
- > minore è α_1 minore sarà la compressione

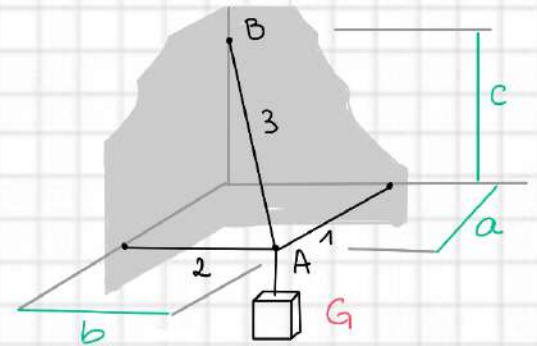


ESERCIZIO 5: Barra collegata ad una fune ed un peso

Supponendo di conoscere:

- le lunghezze a, b, c
- il peso G

Determinare le forze che agiscono sulla fune e le barre.



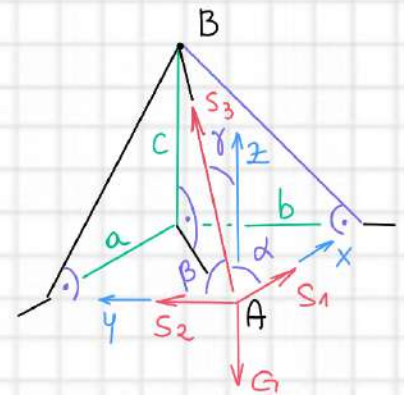
$$R_x = \sum F_{ix} = 0 \rightarrow S_1 + S_3 \cos \alpha = 0$$

$$R_y = \sum F_{iy} = 0 \rightarrow S_2 + S_3 \cos \beta = 0$$

$$R_z = \sum F_{iz} = 0 \rightarrow -G + S_3 \cos \gamma = 0$$

$$\begin{cases} S_1 = -S_3 \cos \alpha \\ S_2 = -S_3 \cos \beta \\ S_3 = \frac{G}{\cos \gamma} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 = -\frac{G \cos \alpha}{\cos \gamma} \\ S_2 = -\frac{G \cos \beta}{\cos \gamma} \\ S_3 = \frac{G}{\cos \gamma} \end{cases}$$



$$\overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$a = \overline{AB} \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

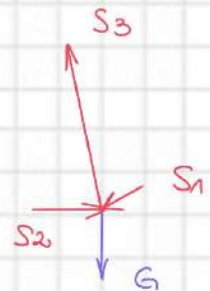
$$b = \overline{AB} \cos \beta \rightarrow \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$c = \overline{AB} \cos \gamma \rightarrow \cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \frac{G \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}{\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}} \\ S_2 = -G \frac{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}{\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}} \\ S_3 = \frac{G}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = -G \frac{a}{c} \\ S_2 = -G \frac{b}{c} \\ S_3 = G \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c} \end{array} \right.$$

Inverto quindi il verso di S1 e S2



ESERCIZIO 1: Trovare l'angolo della risultante e la risultante stessa.

$$F_1 = 180 \text{ N} \quad \alpha_1 = 45^\circ$$

$$F_2 = 50 \text{ N} \quad \alpha_2 = 60^\circ$$

$$F_3 = 30 \text{ N}$$

$$R_x = F_1 \cos(\alpha_1) - F_2 \cos(\alpha_2) - F_3$$

$$= 180 \cos(45^\circ) - 50 \cos(60^\circ) - 30$$

$$= 180 \frac{\sqrt{2}}{2} - 50 \frac{1}{2} - 30 = 90\sqrt{2} - 55$$

$$R_y = F_1 \sin(\alpha_1) + F_2 \sin \alpha_2$$

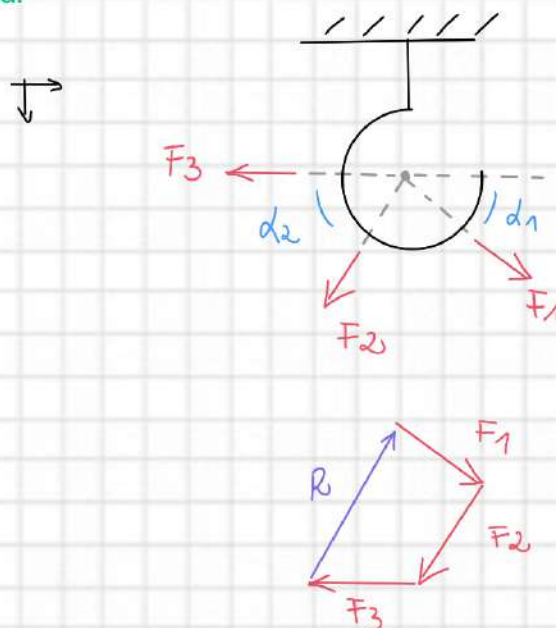
$$= 180 \sin(45^\circ) + 50 \sin(60^\circ)$$

$$= 90\sqrt{2} + 25\sqrt{3}$$

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(90\sqrt{2} - 55)^2 + (90\sqrt{2} + 25\sqrt{3})^2} = 185,26 \text{ N}$$

$$\tan \alpha_R = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \alpha_R = \arctan \left(\frac{R_y}{R_x} \right)$$

$$= \arctan \left(\frac{90\sqrt{2} + 25\sqrt{3}}{90\sqrt{2} - 55} \right) = 67^\circ$$



ESERCIZIO 2: Trovare le forze f_1 e f_2 sapendo che $F = 5 \text{ kN}$.

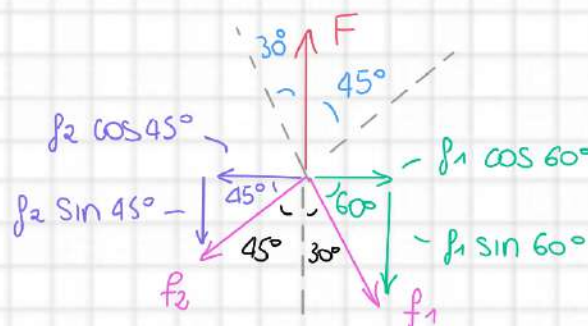
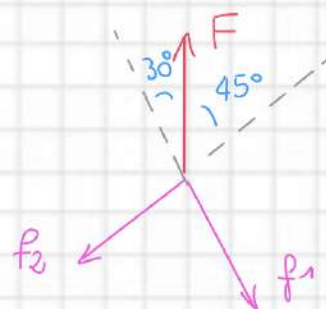
$$\begin{cases} F = f_2 \sin(45^\circ) + f_1 \sin(60^\circ) \\ f_2 \cos(45^\circ) = f_1 \cos(60^\circ) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = \frac{\sqrt{2}}{2} f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} f_1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} f_2 = \frac{1}{2} f_1 \end{cases} \Rightarrow f_1 = \sqrt{2} f_2$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} f_2 = \frac{1}{2} f_1 \Rightarrow f_1 = \sqrt{2} f_2$$

$$5 = \frac{\sqrt{2}}{2} f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{2} f_2$$

$$5 = f_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} \right)$$



$$p_2 = \frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}} = 2,6 \text{ kN}$$

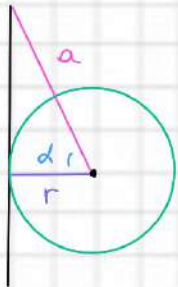
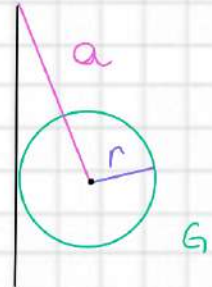
$$p_1 = \sqrt{2} p_2 = 3,7 \text{ kN}$$

ESERCIZIO 3: Trovare la forza esercitata sulla fune sapendo che:

$$r = 20 \text{ cm}$$

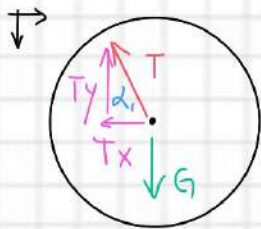
$$G = 20 \text{ N}$$

$$a = 0,6 \text{ m} = 60 \text{ cm}$$



$$r = a \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{r}{a} = \frac{20}{60}$$

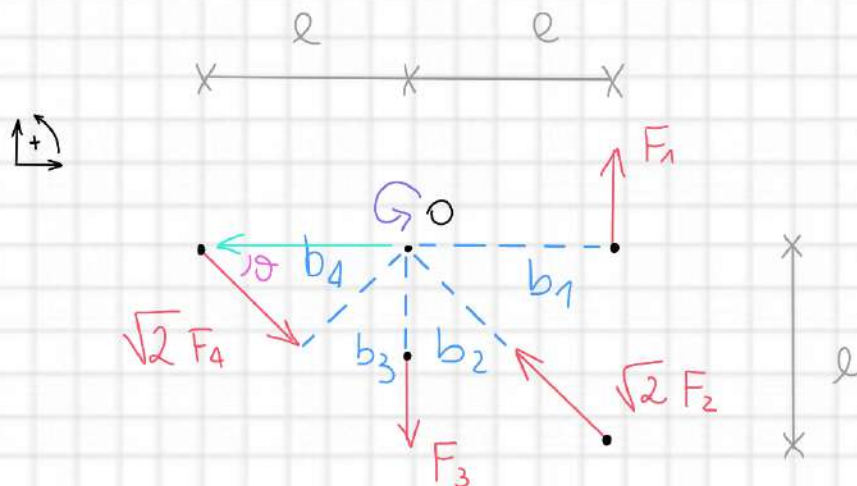
$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 70,5^\circ$$



$$\begin{cases} G - T_y = 0 \\ N - T_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G = T \sin \alpha \\ N = T \cos \alpha \end{cases}$$

$$T = \frac{G}{\sin \alpha} = \frac{20}{\sin(70,5^\circ)} = 21,2 \text{ N}$$

ESERCIZIO 4: Trovare il momento risultante scomponendo le forze.



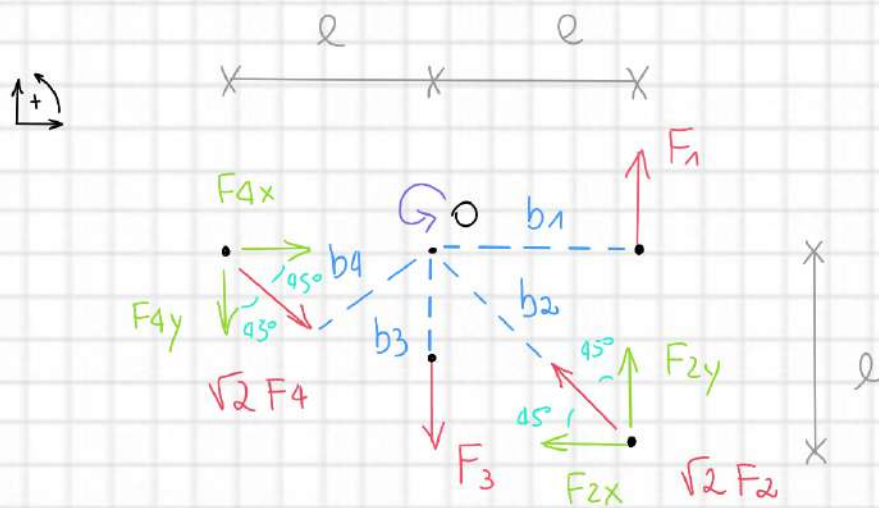
$$M_O = F_1 b_1 + \sqrt{2} F_4 b_4$$

$$= F_1 l + \sqrt{2} F_4 l \sin \theta$$

$$= F_1 l + \sqrt{2} F_4 l \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F$$

$$= 2FL$$

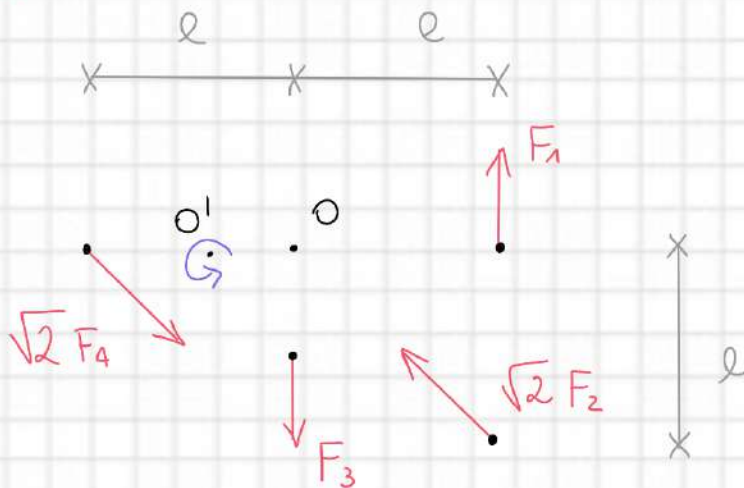


$$M_o = F_1 l + F_2 y e - F_2 x l + F_4 y l$$

$$F_1 = F_2 x = F_2 y = F_3 = F_4 x = F_4 y = F$$

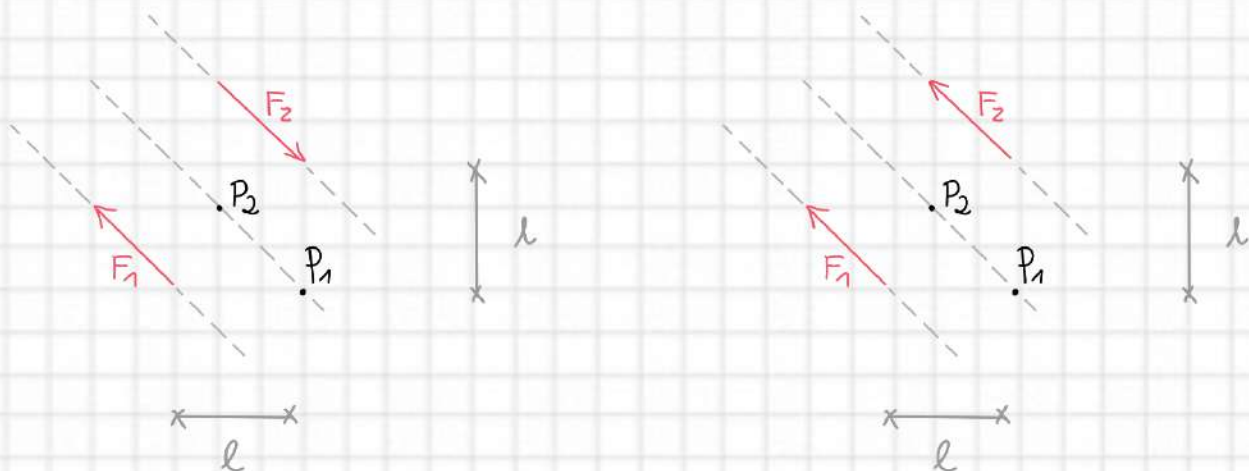
$$= 2 F l$$

ESERCIZIO 5: Verificare che il momento di un sistema di forze a risultante nulla non varia al variare del polo.

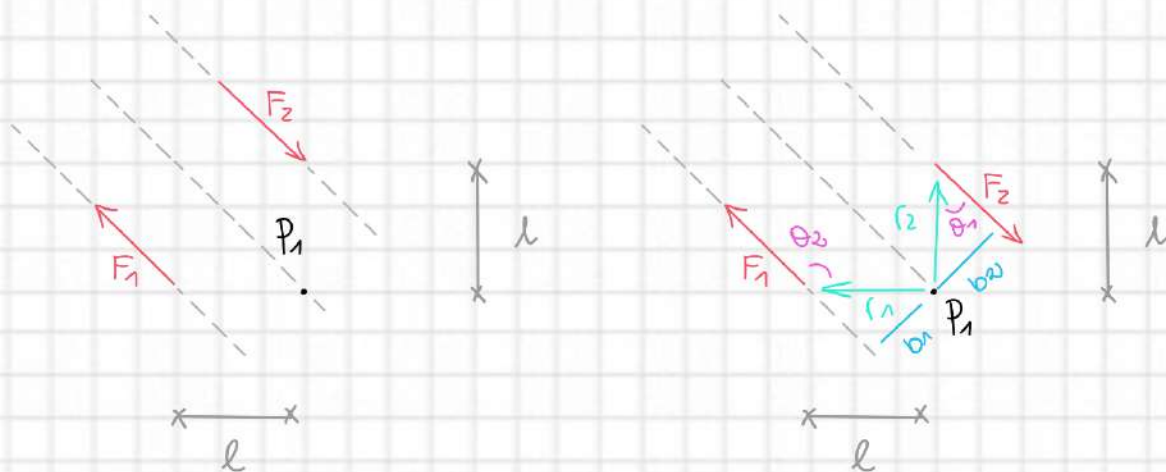


$$\begin{aligned} M_{o'} &= M_o + (O_o') \times R \\ &= M_o + (0) \times \phi \\ &= M_o \end{aligned}$$

ESERCIZIO 6: Verificare che il momento non varia se il polo si sposta parallelamente alla risultante.



Caso 1 +)



$$M_{P1} = F_1 b_1 + F_2 b_2$$

$$= F_1 r_1 \sin(\pi - \theta_1) + F_2 r_2 \sin(\theta_2)$$

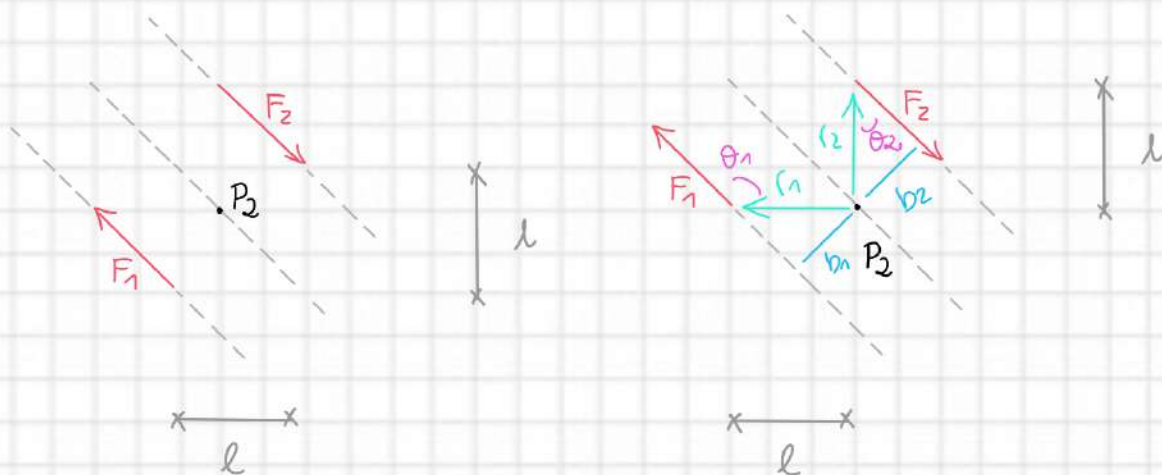
$$= F_1 l \sin(\pi - \theta_1) + F_2 l \sin(\theta_2)$$

$$= F_1 l \frac{\sqrt{2}}{2} + F_2 l \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$F_1 = F_2 = F$$

$$= \sqrt{2} F l$$

Caso 2 +)



$$M_{P2} = F_1 b_1 + F_2 b_2$$

$$= F_1 r_1 \sin(\pi - \theta_1) + F_2 r_2 \sin(\theta_2)$$

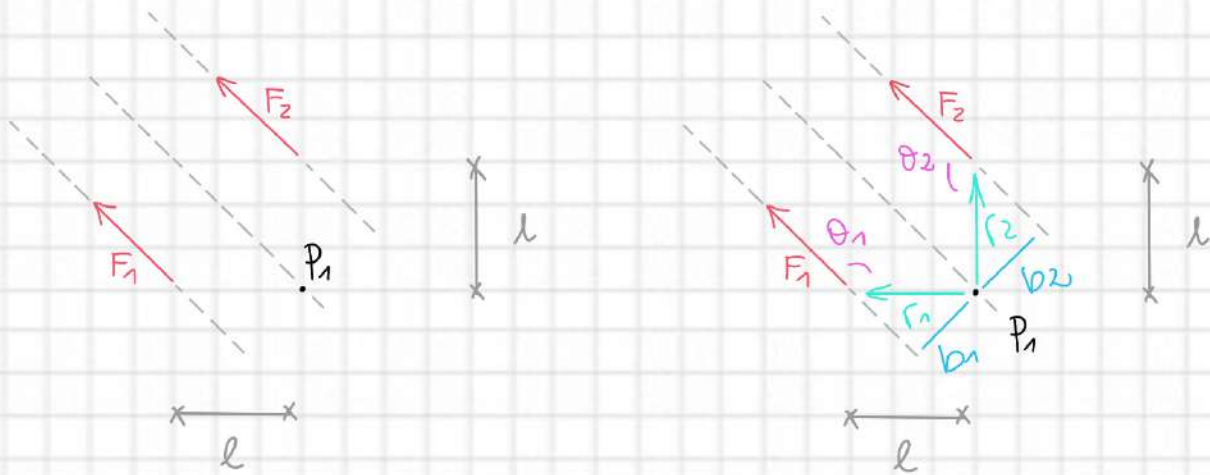
$$= F_1 l \sin(\pi - \theta_1) + F_2 l \sin(\theta_2)$$

$$= F_1 l \frac{\sqrt{2}}{2} + F_2 l \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$F_1 = F_2 = F$$

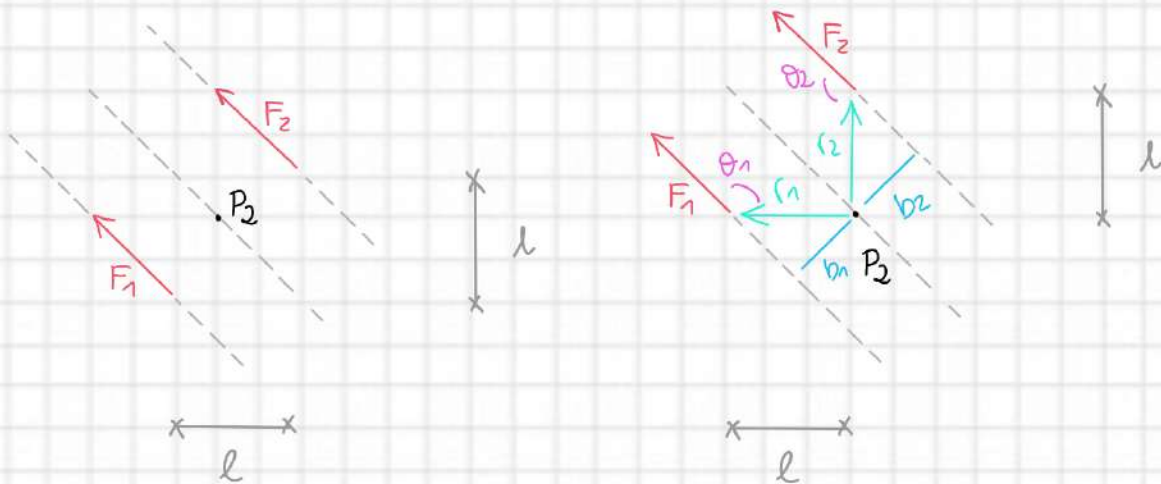
$$= \sqrt{2} F l$$

Caso 3 + ↻



$$\begin{aligned}
 M_{P_3} &= F_1 b_1 - F_2 b_2 \\
 &= F_1 r_1 \sin(\pi - \theta_1) - F_2 r_2 \sin(\pi - \theta_2) \\
 &= F_1 l \sin(\pi - \theta_1) - F_2 l \sin(\pi - \theta_2) \\
 &= F_1 l \frac{\sqrt{2}}{2} - F_2 l \frac{\sqrt{2}}{2} = 0
 \end{aligned}$$

Caso 4 + ↻



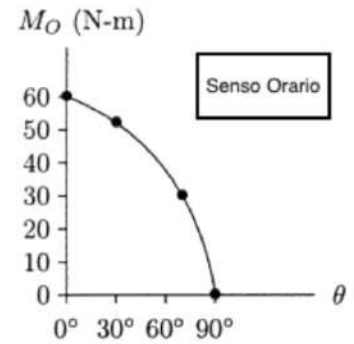
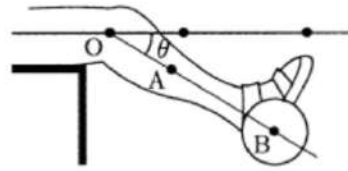
$$\begin{aligned}
 M_{P_4} &= F_1 b_1 - F_2 b_2 \\
 &= F_1 r_1 \sin(\pi - \theta_1) - F_2 r_2 \sin(\pi - \theta_2) \\
 &= F_1 l \sin(\pi - \theta_1) - F_2 l \sin(\pi - \theta_2) \\
 &= F_1 l \frac{\sqrt{2}}{2} - F_2 l \frac{\sqrt{2}}{2} = 0
 \end{aligned}$$

ESERCIZIO 7: Trovare il momento rispetto ad O al variare di θ .

A: baricentro della gamba;
B: caviglia, dove è attaccato il peso

Il momento è:

- massimo se la gamba è dritta
- nullo se la gamba è a 90°



$$M_O = W_1 a \cos \theta + W_2 b \cos \theta$$

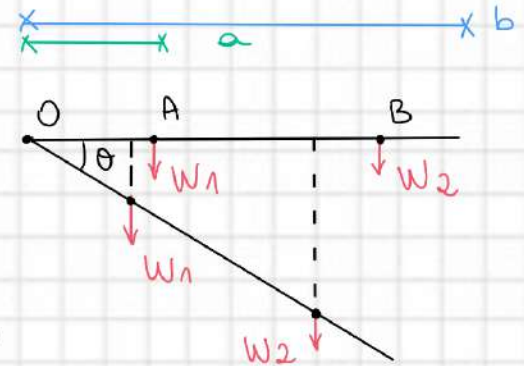
$$= (W_1 a + W_2 b) \cos \theta$$

$$\theta = 0^\circ \quad M_O = 60 \cos(0^\circ) = 60 \text{ [N·m]} \quad \curvearrowright$$

$$\theta = 30^\circ \quad M_O = 60 \cos(30^\circ) = 51.9 \text{ [N·m]} \quad \curvearrowright$$

$$\theta = 60^\circ \quad M_O = 60 \cos(60^\circ) = 30 \text{ [N·m]} \quad \curvearrowright$$

$$\theta = 90^\circ \quad M_O = 60 \cos(90^\circ) = 0 \text{ [N·m]}$$



$$a = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}$$

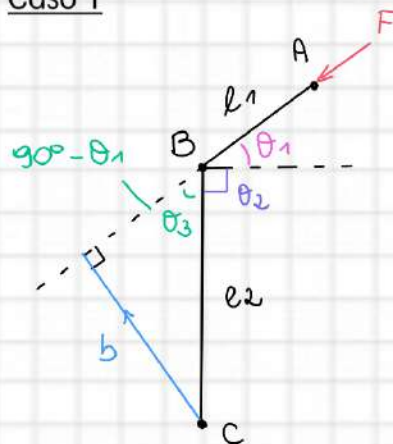
$$b = 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m}$$

$$W_1 = 50 \text{ N}$$

$$W_2 = 100 \text{ N}$$

ESERCIZIO 8: Valutare qual è l'effetto della direzione di una forza F che agisce sulla testa del femore (A) rispetto al momento indotto in B e C.

Caso 1

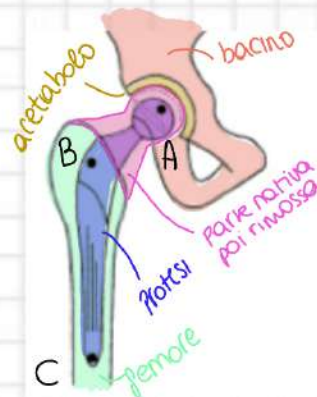


$$M_B = 0$$

$$M_C = F \cdot b$$

$$= F l_2 \sin \theta_3$$

$$= 400 \cdot 0.05 \cdot \sin 45^\circ = 28 \text{ [N·m]} \quad \curvearrowright$$



Dati:

$$F = 400 \text{ N}$$

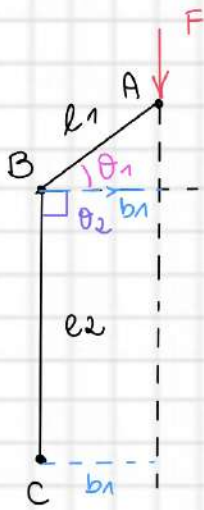
$$l_1 = 50 \text{ mm}$$

$$l_2 = l_1$$

$$\theta_1 = 45^\circ$$

$$\theta_2 = 90^\circ$$

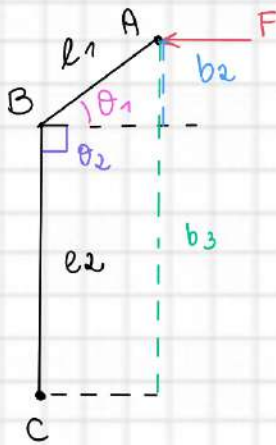
Caso 2



$$\begin{aligned}
 M_B &= F \cdot b_1 \\
 &= F l_1 \cos \theta_1 \\
 &= 400 \cdot 0,05 \cos 45^\circ = 14 \text{ [N} \cdot \text{m]} \curvearrowright
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_C &= F \cdot b_1 \\
 &= 14 \text{ [N} \cdot \text{m]} \curvearrowright
 \end{aligned}$$

Caso 3

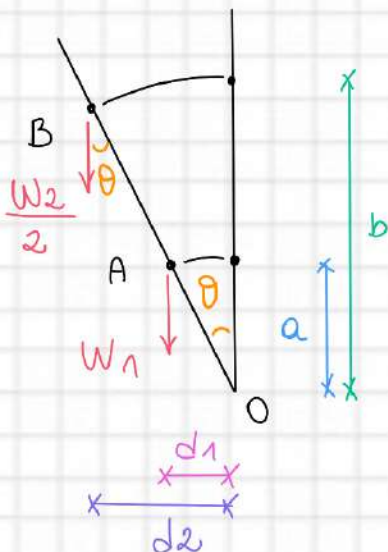


$$\begin{aligned}
 M_B &= F b_2 \\
 &= F l_1 \cos (\theta_1) \\
 &= 400 \cdot 0,05 \cos 45^\circ = 14 \text{ [N} \cdot \text{m]} \curvearrowleft
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_C &= F b_3 \\
 &= F [l_1 \cos \theta_1 + l_2] \\
 &= 400 [0,05 \cos 45^\circ + 0,05] = 54 \text{ [N} \cdot \text{m]} \curvearrowup
 \end{aligned}$$

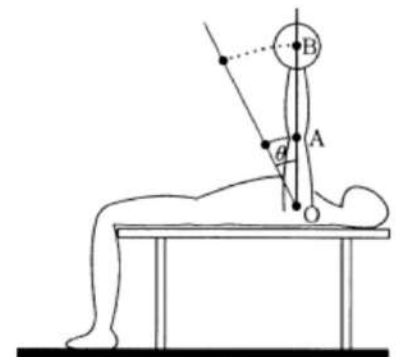
ESERCIZIO 9: Un atleta si allena con un bilanciere; determinare il momento indotto sulla spalla (O) nelle varie fasi dell'esercizio

($\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$)



$$\begin{aligned}
 a &= 24 \text{ cm} = 0,24 \text{ m} \\
 b &= 60 \text{ cm} = 0,6 \text{ m} \\
 W_1 &= 50 \text{ N} \\
 W_2 &= 300 \text{ N}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_O &= W_1 d_1 + \frac{W_2}{2} d_2 \\
 &= W_1 a \sin \theta + \frac{W_2}{2} b \sin \theta \\
 &= \left(W_1 a + \frac{W_2}{2} b \right) \sin \theta
 \end{aligned}$$



$$\theta = 0^\circ \quad M_0 = (50 \cdot 0,24 + 150 \cdot 0,6) \sin(0^\circ) = 0 \text{ [N} \cdot \text{m]} + 2$$

$$\theta = 15^\circ \quad M_0 = 102 \cdot \sin(15^\circ) = 26,4 \text{ [N} \cdot \text{m]} + 2$$

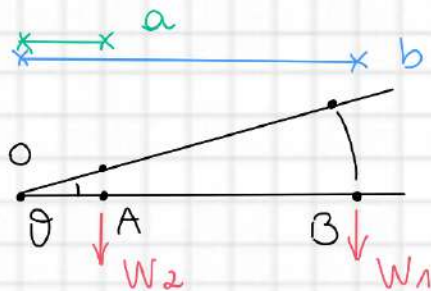
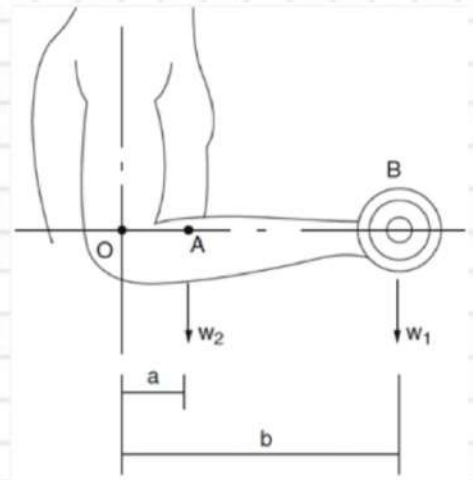
$$\theta = 30^\circ \quad M_0 = 102 \cdot \sin(30^\circ) = 51 \text{ [N} \cdot \text{m]} + 2$$

$$\theta = 45^\circ \quad M_0 = 102 \cdot \sin(45^\circ) = 72,1 \text{ [N} \cdot \text{m]} + 2$$

$$\theta = 60^\circ \quad M_0 = 102 \cdot \sin(60^\circ) = 88,3 \text{ [N} \cdot \text{m]} + 2$$

ESERCIZIO 10: Si consideri un atleta che esegue esercizi di flessione/estensione del braccio inferiore per rafforzare i muscoli bicipiti.

L'atleta sta tenendo il peso di $W_1 = 150 \text{ N}$ in mano, e il peso del suo avambraccio è $W_2 = 20 \text{ N}$. Come misurato dal gomito (punto O), il centro di gravità del avambraccio (punto A) si trova a una distanza di 7.5 cm e il centro di la gravità del peso tenuto in mano si trova ad una distanza $b = 32 \text{ cm}$. Determinare il momento risultante al gomito, quando l'avambraccio è esteso orizzontalmente e quando il suo asse forma un angolo $\theta = 30^\circ$ e $\theta = 60^\circ$ con l'asse orizzontale.



$$\begin{aligned} W_1 &= 150 \text{ N} \\ W_2 &= 20 \text{ N} \\ a &= 7,5 \text{ cm} = 0,075 \text{ m} \\ b &= 32 \text{ cm} = 0,32 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 30^\circ \\ \theta_2 &= 60^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_0 &= W_2 a \cos \theta + W_1 b \cos \theta \\ &= (W_2 a + W_1 b) \cos \theta \end{aligned}$$

$$\theta = 0^\circ \quad (20 \cdot 0,075 + 150 \cdot 0,32) \cos(0^\circ) = 49,5 \text{ [N} \cdot \text{m]} \quad 2$$

$$\theta = 30^\circ \quad 49,5 \cos(30^\circ) = 42,9 \text{ [N} \cdot \text{m]} \quad 2$$

$$\theta = 60^\circ \quad 49,5 \cos(60^\circ) = 24,75 \text{ [N} \cdot \text{m]} \quad 2$$

ESERCIZIO 11: Blocco rettangolare di lati a, b, c soggetto a 6 forze. Calcolare:

- risultante R
- momento risultante rispetto ad A
- momento risultante rispetto a B

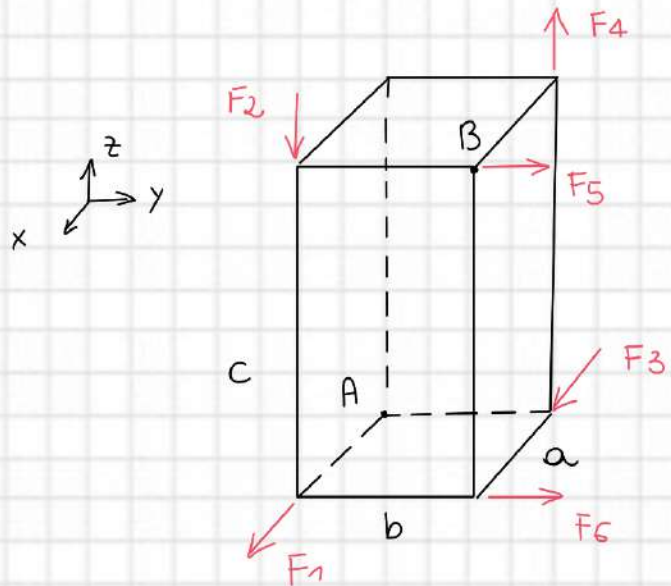
$$a = b$$

$$c = 2a$$

$$F_1 = F_2 = F$$

$$F_3 = F_4 = 2F$$

$$F_5 = F_6 = 3F$$



Risultante

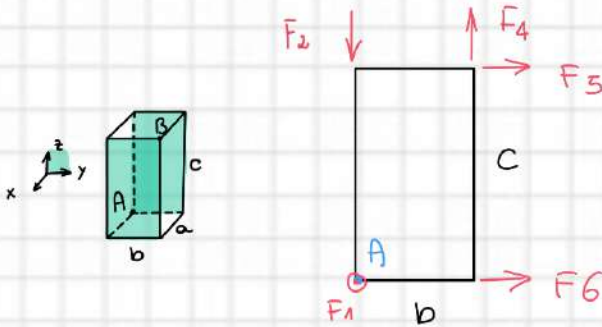
$$R_x = F_1 + F_3 = 3F$$

$$R_y = F_5 + F_6 = 6F$$

$$R_z = -F_2 + F_4 = F$$

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{9F^2 + 36F^2 + F^2} = \sqrt{46}F$$

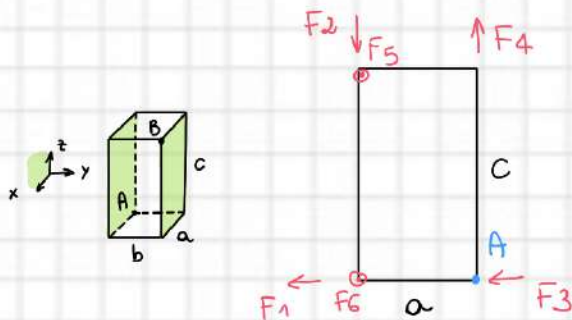
Momento risultante rispetto ad A $+ \curvearrowright$



$$M_{R_x}^A = F_4 b - F_5 c$$

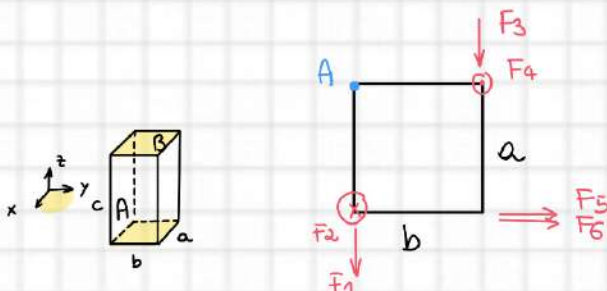
$$= 2Fa - 6Fa$$

$$= -4Fa$$



$$M_{R_y}^A = F_2 a$$

$$= Fa$$



$$M_{R_z}^A = -F_3 b + F_5 a + F_6 a$$

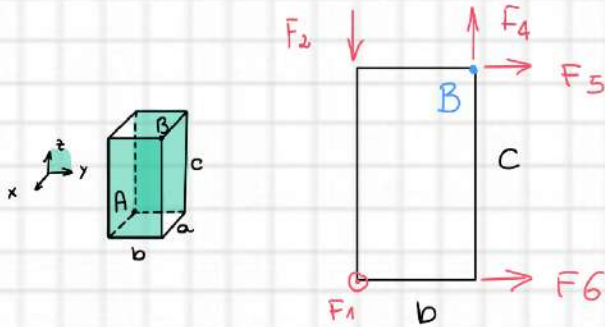
$$= -2Fa + 3Fa + 3Fa$$

$$= 4Fa$$

$$|M_R^A| = \sqrt{M_{Rx}^A{}^2 + M_{Ry}^A{}^2 + M_{Rz}^A{}^2}$$

$$= \sqrt{16 + 1 + 16} Fa = \sqrt{33} Fa$$

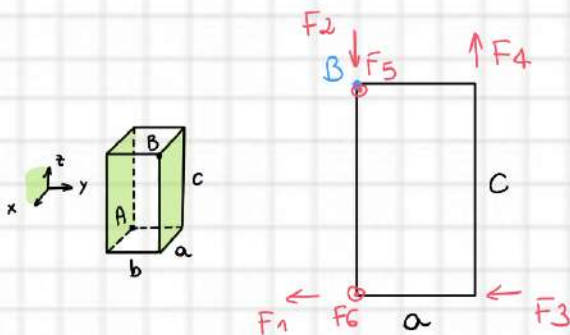
Momento risultante rispetto a B +)



$$M_{Rx}^B = F_2 b + F_6 c$$

$$= Fa + 6 Fa$$

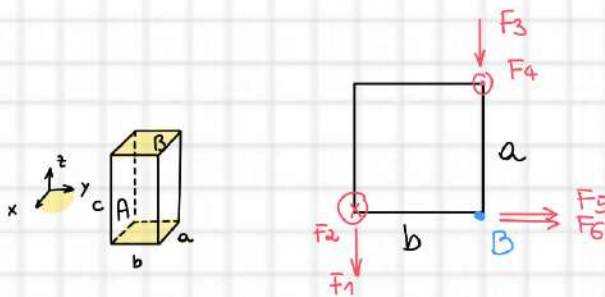
$$= 7 Fa$$



$$M_{Ry}^B = -F_1 c - F_3 c + F_4 a$$

$$= -2Fa - 4Fa + 2Fa$$

$$= -4Fa$$



$$M_{Rz}^B = F_1 b$$

$$= Fa$$

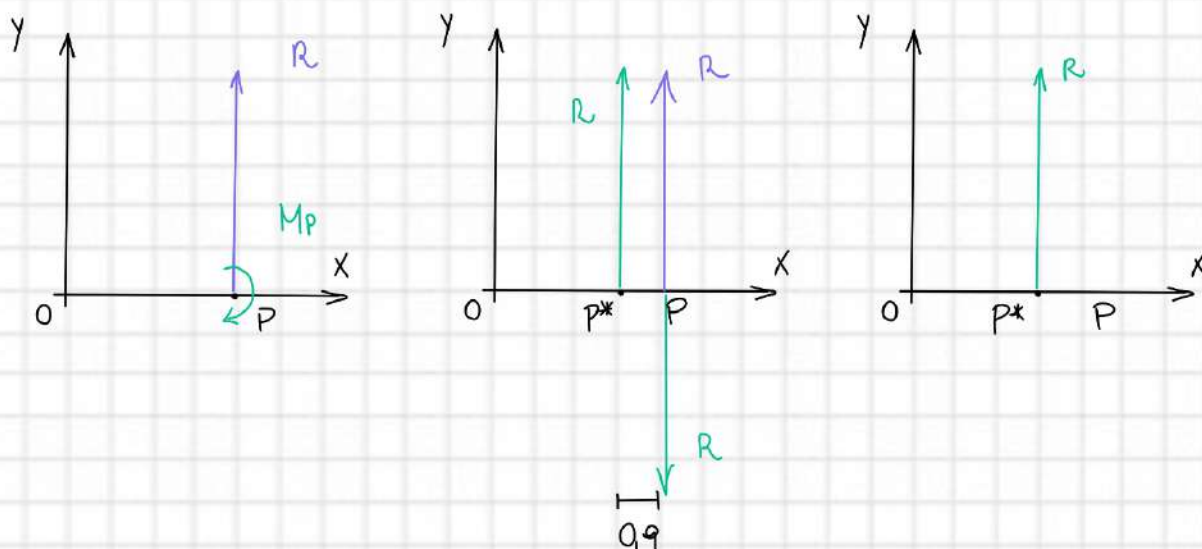
$$|M| = \sqrt{M_{Rx}^B{}^2 + M_{Ry}^B{}^2 + M_{Rz}^B{}^2} = \sqrt{49 + 16 + 1} Fa = \sqrt{66} Fa$$

ESERCIZIO 12: Verificare che il momento di una coppia di forze è indipendente dal polo.

Per coppia di forze si intende due forze opposte non allineate; essendo tali forze opposte, la risultante è nulla e citando la terza proprietà dei momenti "il momento di un sistema di forze a risultante nulla non varia al variare del polo" quindi è indipendente da esso.

ESERCIZIO 1: Sfruttare il momento di trasporto per ottenere la stessa soluzione del seguente esercizio visto in aula.

Voglio trovare il punto di applicazione P^* tale per cui il sistema vettore-momento è equivalente al vettore risultante utilizzando il momento di trasporto $\rightarrow$ si deve mettere una coppia di forze di braccio pari 0,9.



ESERCIZIO 2: Determinare R , α e h .

Risultante

$$R_x = F \cos 60^\circ - \cancel{2F \cos 60^\circ} + F \cos 60^\circ + \cancel{2F \cos 60^\circ}$$

$$= \frac{F}{2} + \frac{F}{2} = F$$

$$R_y = F \sin 60^\circ + \cancel{2F \sin 60^\circ} + F \sin 60^\circ - \cancel{2F \sin 60^\circ}$$

$$= F \frac{\sqrt{3}}{2} + F \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} F$$

$$\|R\| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} F = 2F$$

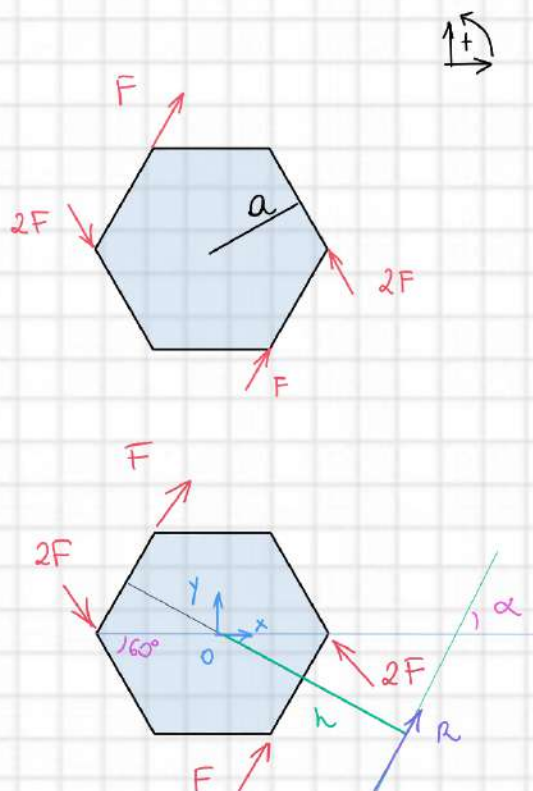
Angolo α

$$\alpha = \operatorname{atg} \left(\frac{R_y}{R_x} \right) = \operatorname{atg} \frac{\sqrt{3}F}{F} = 60^\circ$$

h

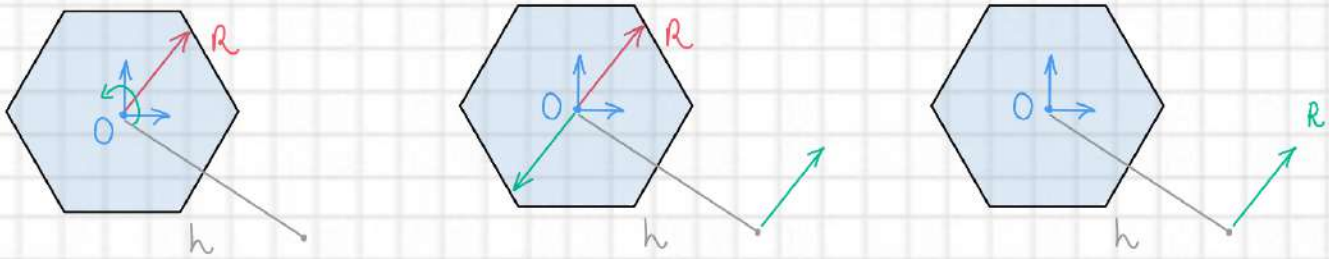
$$M_O^R = -\cancel{\alpha F} + 2aF + \cancel{\alpha F} + 2aF = 4aF \quad \hookrightarrow$$

$$h \cdot R = 4aF \Rightarrow h = \frac{4aF}{2F} = 2a$$



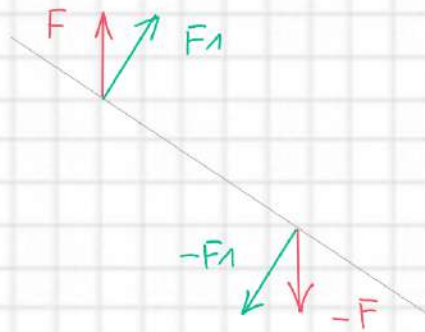
ESERCIZIO 3: Riprendendo l'esercizio precedente, ragionare sul momento di trasporto.

Voglio ottenere un sistema equivalente; considero il momento come una coppia di forze



ESERCIZIO 4: Trasformare una coppia a risultante nulla in un'altra.

"Una coppia può essere trasformata in un'altra $\rightarrow$ le forze che la costituiscono risultano perpendicolari alla congiungente i loro punti di applicazione."



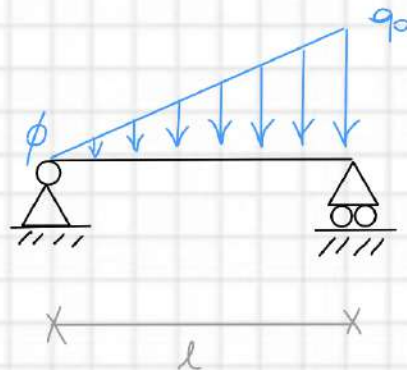
ESERCIZIO 5: Trovare il centro delle forze nel caso in cui ci sia un carico triangolare.

Scrivo una legge che descriva il carico:

$$q(x) = q_0 \frac{x}{l} = \begin{cases} 0 & \text{per } x=0 \\ q_0 & \text{per } x=l \end{cases}$$

Trovo il centro delle forze:

$$x_c = \frac{\int x q(x) dx}{\int q(x) dx}$$



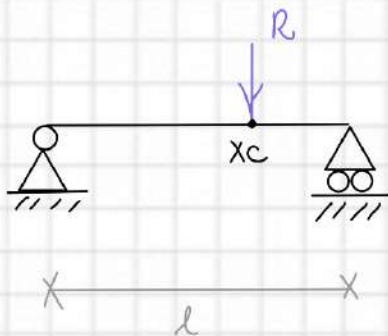
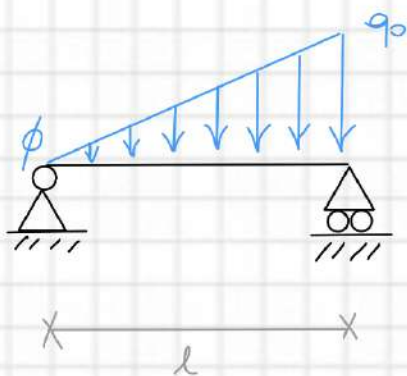
$$\begin{aligned} \int x q(x) dx &= \int x q_0 \frac{x}{l} dx = \frac{q_0}{l} \int x^2 dx = \frac{q_0}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{q_0}{l} \frac{l^3}{3} \\ &= \frac{q_0 l^2}{3} \end{aligned}$$

$$\int_0^l q(x) dx = \int_0^l q_0 \frac{x}{l} dx = \frac{q_0}{l} \int_0^l x dx = \frac{q_0}{l} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l = \frac{q_0}{l} \frac{l^2}{2} = \frac{q_0 l}{2}$$

$$\Rightarrow x_c = \frac{\frac{q_0 l^2}{3}}{\frac{q_0 l}{2}} = \frac{\cancel{q_0} l^2}{3} \cdot \frac{2}{\cancel{q_0} l} = \frac{2}{3} l \rightarrow \text{punto in cui si trova la forza concentrata equivalente al carico distribuito}$$

Il modulo della forza concentrata equivalente al carico si calcola facendo l'area del triangolo:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{l \cdot q_0}{2} = R$$



ESERCIZIO 6: Trovare C (centroide) nel caso di una sezione piana triangolare di lato a e altezza h.

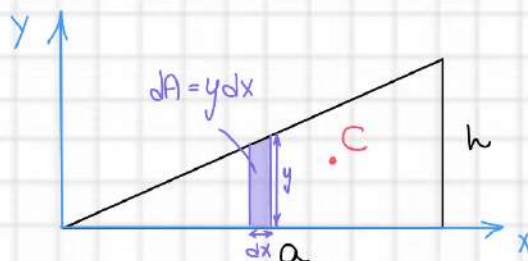
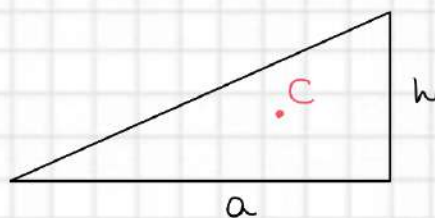
Inserisco un asse cartesiano e us la formula:

$$x_c = \frac{\int_A x dA}{A}$$

$$\int_A x dA = \int x y dx$$

Faccio un cambio di variabile:

$$y = h \frac{x}{a} = \begin{cases} 0 & \text{per } x=0 \\ h & \text{per } x=a \end{cases}$$



$$\Rightarrow \int x \frac{h x}{a} dx = \frac{h}{a} \int x^2 dx = \frac{h}{a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{h}{a} \frac{a^3}{3} = \frac{h a^2}{3}$$

$$A = \frac{a h}{2}$$

$$\Rightarrow x_c = \frac{\cancel{h} a^2}{3} \cdot \frac{2}{\cancel{a} h} = \frac{2}{3} a$$

$$y_c = \frac{\int_A y dA}{A}$$

$$\int_A y dA = \int y (a-x) dy$$

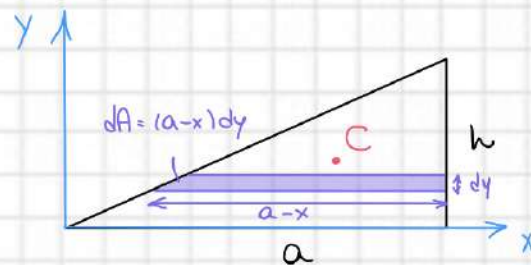
$$x = a \frac{y}{h}$$

$$\begin{aligned} \int y (a-x) dy &= \int y \left(a - \frac{a y}{h} \right) dy = a \int y dy - \frac{a}{h} \int y^2 dy \\ &= a \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h - \frac{a}{h} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{a h^2}{2} - \frac{a h^2}{3} = \frac{1}{6} a h^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_c = \frac{1}{6} a h^2 \cdot \frac{6}{a h} = \frac{h}{3}$$

Si ha quindi:

$$C = \left(\frac{2}{3} h, \frac{h}{3} \right)$$



ESERCIZIO 7: Trovare il centroide della seguente figura.

Consideriamo la figura divisa in 3 sezioni, calcolo il centroide di ogni sezione e infine sfrutto la proprietà distributiva del baricentro.

Sezione 1

Centroide

$$C_1 (2, 13)$$

Area

$$A_1 = b \cdot h = 24 \text{ cm}^2$$

Momento statico

$$S_{x1} = A_1 y_{1c} = 312 \text{ cm}^3$$

$$S_{y1} = A_1 x_{1c} = 48 \text{ cm}^3$$

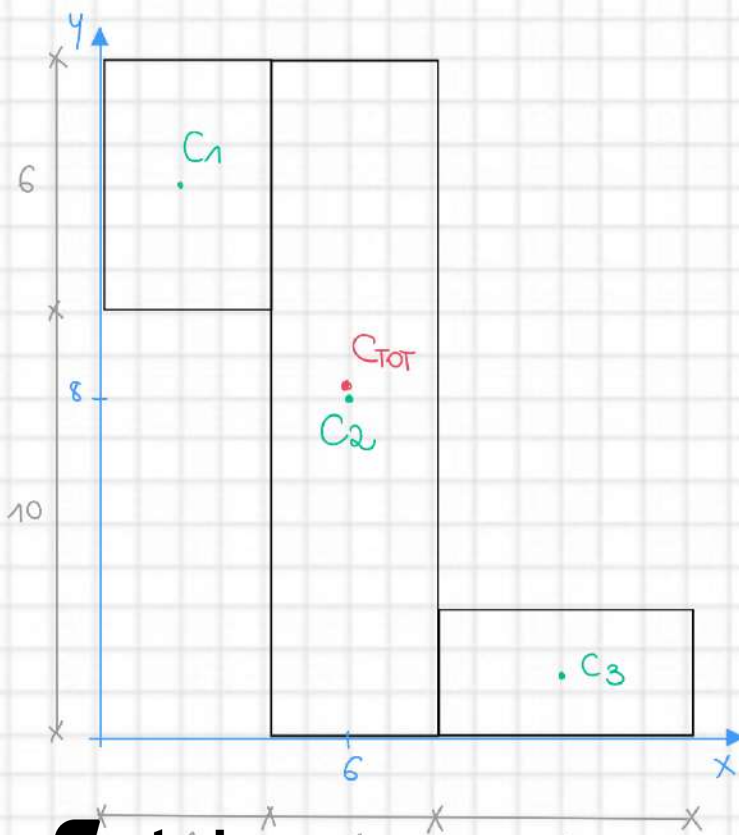
Sezione 2

Centroide

$$C_2 (6, 8)$$

Area

$$A_2 = b \cdot h = 48 \text{ cm}^2$$



Momento statico $S_{x2} = A_2 y_{2c} = 512 \text{ cm}^3$
 $S_{y2} = A_2 x_{2c} = 384 \text{ cm}^3$

Sezione 3

Centroide $C_3 (11; 1,5)$

Area $A_3 = b \cdot h = 18 \text{ cm}^2$

Momento statico $S_{x3} = A_3 y_{3c} = 27 \text{ cm}^3$
 $S_{y3} = A_3 x_{3c} = 198 \text{ cm}^3$

Applico la proprietà distributiva:

$$A_{\text{Tot}} = \sum_i A_i = 24 + 64 + 18 = 106 \text{ cm}^2$$

$$S_{x\text{Tot}} = \sum_i S_{xi} = 312 + 512 + 27 = 851 \text{ cm}^3$$

$$S_{y\text{Tot}} = \sum_i S_{yi} = 48 + 384 + 198 = 630 \text{ cm}^3$$

$$x_{\text{CTot}} = \frac{S_{y\text{Tot}}}{A_{\text{Tot}}} = \frac{630}{106} = 5,94 \text{ cm}$$

$$y_{\text{CTot}} = \frac{S_{x\text{Tot}}}{A_{\text{Tot}}} = \frac{851}{106} = 8,03 \text{ cm}$$

ESERCIZIO 8: Verificare che cambiando il sistema di riferimento la posizione del centroide non varia.

Sezione 1

Centroide $C_1 (-6, -3)$

Area $A_1 = b \cdot h = 24 \text{ cm}^2$

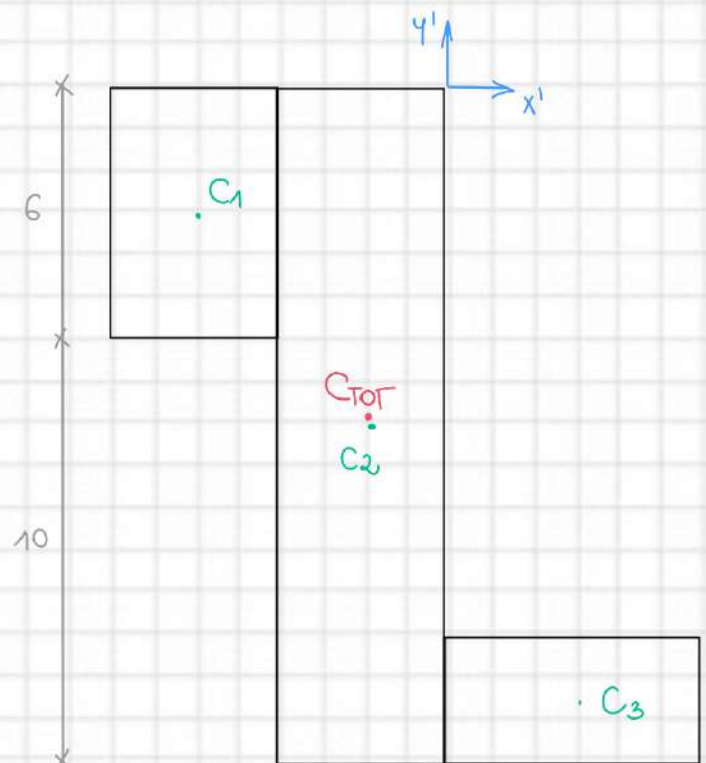
Momento statico $S_{x1} = A \cdot y_c = -72 \text{ cm}^3$
 $S_{y1} = A \cdot x_c = -144 \text{ cm}^3$

Sezione 2

Centroide $C_2 (-2, -8)$

Area $A_2 = b \cdot h = 48 \text{ cm}^2$

Momento statico $S_{x2} = A \cdot y_c = -512 \text{ cm}^3$
 $S_{y2} = A \cdot x_c = -96 \text{ cm}^3$



Sezione 3

Centroide

$$C_3 (3, -13, 5)$$

Area

$$A_3 = b \cdot h = 18 \text{ cm}^2$$

Momento statico

$$S_{x3} = A \cdot y_c = -243 \text{ cm}^3$$

$$S_{y3} = A \cdot x_c = 54 \text{ cm}^3$$

$$A_{\text{Tot}} = \sum A_i = 24 + 64 + 18 = 106 \text{ cm}^2$$

$$S_{x\text{Tot}} = \sum S_{xi} = -72 - 512 - 243 = -827 \text{ cm}^3$$

$$S_{y\text{Tot}} = \sum S_{yi} = -144 - 96 + 54 = -186 \text{ cm}^3$$

$$x_{\text{CTOT}} = \frac{S_{y\text{Tot}}}{A_{\text{Tot}}} = \frac{-186}{106} = -1,75 \text{ cm}$$

$$y_{\text{CTOT}} = \frac{S_{x\text{Tot}}}{A_{\text{Tot}}} = \frac{-827}{106} = -7,8 \text{ cm}$$

ESERCIZIO 9: Calcolare la posizione del baricentro della seguente figura

Sfrutto la proprietà del baricentro della densità fittizia.

Rettangolo

Centroide

$$(7, 10)$$

Area

$$A = b \cdot h = 14 \cdot 20 = 280 \text{ cm}^2$$

Momento statico

$$S_x = A \cdot y_c = 280 \cdot 10 = 2800 \text{ cm}^3$$

$$S_y = A \cdot x_c = 480 \cdot 7 = 3360 \text{ cm}^3$$

Cerchio

Centroide

$$(8, 12)$$

Area

$$A = \pi R^2 = \pi \cdot 16 = 50,27 \text{ cm}^2$$

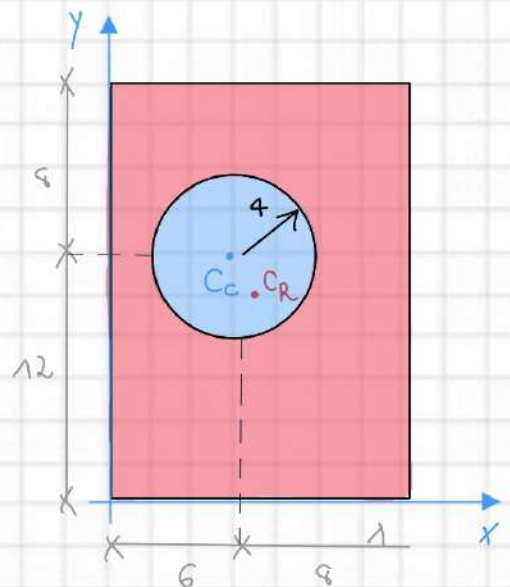
Momento statico

$$S_x = A y_c = 50,27 \cdot 12 = 603,19 \text{ cm}^3$$

$$S_y = A x_c = 50,27 \cdot 8 = 402,16 \text{ cm}^3$$

$$A_{\text{Tot}} = 280 - 50,27 = 229,73 \text{ cm}^2$$

$$S_{x\text{Tot}} = 2800 - 603,19 = 2196,81 \text{ cm}^3$$



$$S_{TOT} = 3360 - 402,16 = 1658,41 \text{ cm}^3$$

$$x_{CTOT} = \frac{S_{TOT}}{A} = \frac{1658,41}{229,73} = 7,22 \text{ cm}$$

$$y_{CTOT} = \frac{S_{TOT}}{A} = \frac{2196,81}{229,73} = 9,56 \text{ cm}$$

ESERCIZIO 10: Calcolare la posizione del centroide nella seguente figura.

$$x_C = \frac{\int_A x dA}{A}$$

$$A = \frac{a \cdot h \cdot \pi}{2}$$

$$\int_A x dA = \int x y dx$$

$$y = \frac{h}{a^2} x^2$$

$$\int x \frac{h x^2}{a^2} dx = \frac{h}{a^2} \int x^3 dx = \frac{h}{a^2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-a}^a$$

$$\frac{h}{a^2} \left[\frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{4} \right] = 0$$

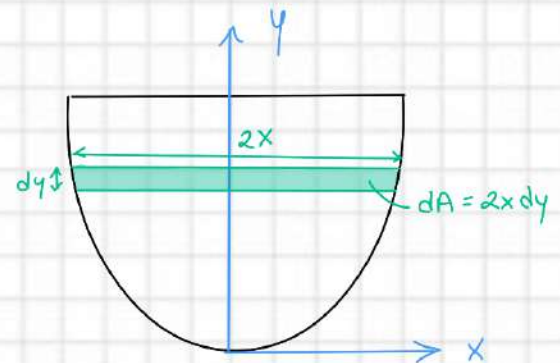
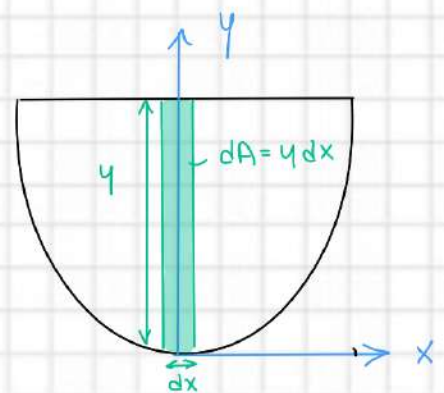
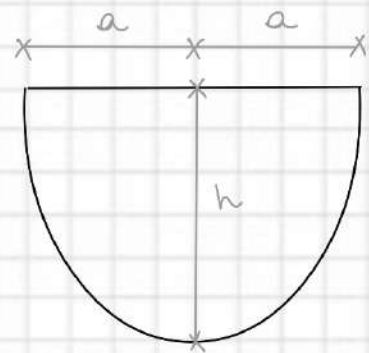
$$y_C = \frac{\int_A y dA}{A}$$

$$\int_A y dA = \int y 2x dy$$

$$x = a \sqrt{\frac{y}{h}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int y 2a \sqrt{\frac{y}{h}} &= \frac{2a}{\sqrt{h}} \int y \sqrt{y} = \frac{2a}{\sqrt{h}} \left[\frac{2}{5} y^2 \sqrt{y} \right]_0^h = \frac{2a}{\sqrt{h}} \frac{2}{5} h^2 \sqrt{h} \\ &= \frac{4a}{5} h^2 \end{aligned}$$

$$y_C = \frac{4a}{5} h^2 \cdot \frac{2}{\pi h} = \frac{8a}{5\pi} h \approx \frac{3}{5} h$$



ESERCIZIO 11: Calcolare la posizione del centroide nella seguente figura.

Sezione 1

Centroide

$$C_1 = \left(\frac{t}{2}, 4a \right)$$

Area

$$A_1 = 8a \cdot t$$

Momento statico

$$S_x = 8at \cdot 4a = 32a^2t$$

$$S_y = 8at \frac{t}{2} = 4at^2$$

Sezione 2

Centroide

$$C_2 = \left(\frac{5a}{2}, \frac{t}{2} \right)$$

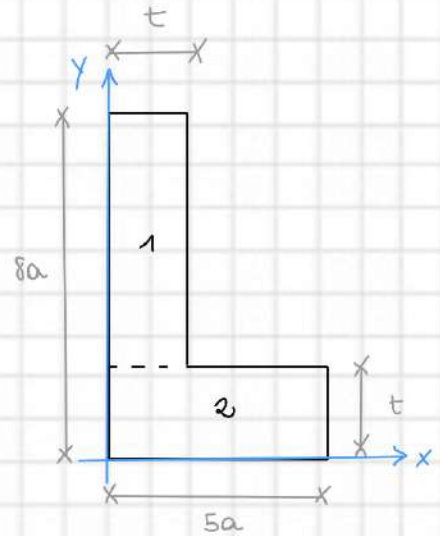
Area

$$A_2 = 5a \cdot t$$

Momento statico

$$S_x = \frac{5at^2}{2}$$

$$S_y = \frac{25a^2}{2} t$$



$$A_{TOT} = 8at + 5at = 13at$$

$$S_{xTOT} = 32a^2t + \frac{5}{2}at^2 = at \left[32a + \frac{5}{2}t \right]$$

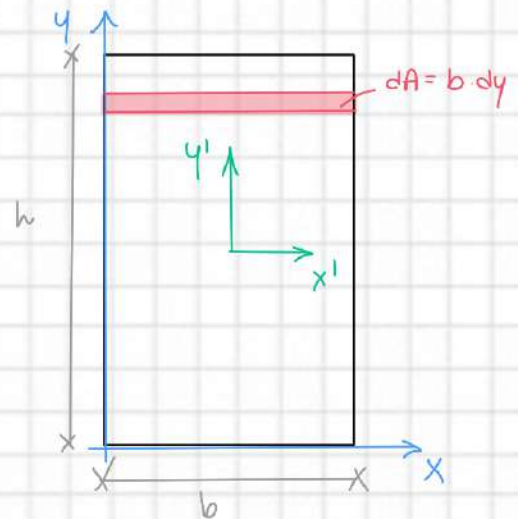
$$S_{yTOT} = 4at^2 + \frac{25}{2}a^2t = at \left[4t + \frac{25}{2}a \right]$$

$$x_C = \frac{S_{yTOT}}{A_{TOT}} = \cancel{at} \left[4t + \frac{25}{2}a \right] \frac{1}{13\cancel{at}} \stackrel{a \gg t}{=} \frac{25}{26}a$$

$$y_C = \frac{S_{xTOT}}{A_{TOT}} = \cancel{at} \left[32a + \frac{5}{2}t \right] \frac{1}{13\cancel{at}} \stackrel{a \gg t}{=} \frac{32}{13}a$$

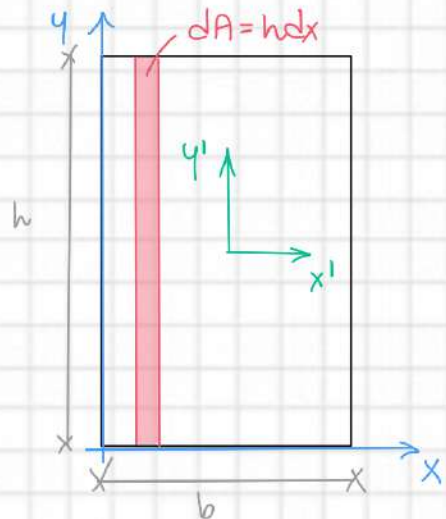
ESERCIZIO 12: Trovare il momento di inerzia rispetto agli assi y' , x e y della seguente figura.

$$\begin{aligned}
 I_{x'} &= \int_A y^2 dA \\
 &= \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} \\
 &= b \left[\frac{(h/2)^3}{3} - \frac{(-h/2)^3}{3} \right] \\
 &= b \left[\frac{h^3}{8 \cdot 3} + \frac{h^3}{8 \cdot 3} \right] = 2b \frac{h^3}{24} = \frac{bh^3}{12}
 \end{aligned}$$



$$I_x = I_{x'} + d^2 A = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 b \cdot h = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{4} \left[\frac{1}{3} + 1 \right] = \frac{bh^3}{3}$$

$$\begin{aligned}
 I_{y'} &= \int_A x^2 dA \\
 &= \int_{-b/2}^{b/2} x^2 h dx = h \int_{-b/2}^{b/2} x^2 dx = h \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} \\
 &= h \left[\frac{(b/2)^3}{3} - \frac{(-b/2)^3}{3} \right] = h \left[\frac{b^3}{8 \cdot 3} + \frac{b^3}{8 \cdot 3} \right] \\
 &= \frac{2h b^3}{24} = \frac{hb^3}{12}
 \end{aligned}$$



$$I_y = I_{y'} + d^2 A = \frac{hb^3}{12} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 h \cdot h = \frac{hb^3}{12} + \frac{b^3 h}{4} = \frac{b^3 h}{4} \left[\frac{1}{3} + 1 \right] = \frac{b^3 h}{3}$$

ESERCIZIO 1: Ricavare le componenti C_1, C_2, C_3 .

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \underbrace{(a_2 b_3 - b_2 a_3)}_{C_1} i + \underbrace{(a_3 b_1 - a_1 b_3)}_{C_2} j + \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}_{C_3} k$$

$$C_k = a_i b_j \varepsilon_{ijk}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= a_1 \cancel{b_1} \varepsilon_{111} + a_1 \cancel{b_2} \varepsilon_{121} + a_1 \cancel{b_3} \varepsilon_{131} + \\ &+ a_2 \cancel{b_1} \varepsilon_{211} + a_2 \cancel{b_2} \varepsilon_{221} + a_2 b_3 \varepsilon_{231} + \\ &+ a_3 \cancel{b_1} \varepsilon_{311} + a_3 b_2 \varepsilon_{321} + a_3 \cancel{b_3} \varepsilon_{331} = \\ &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \end{aligned}$$

1	(+)
3	2
1	(-)
3	2
	(0)
ALTRIMENTI	

$$\begin{aligned} C_2 &= a_1 \cancel{b_1} \varepsilon_{112} + a_1 \cancel{b_2} \varepsilon_{122} + a_1 b_3 \varepsilon_{132} + \\ &+ a_2 \cancel{b_1} \varepsilon_{212} + a_2 \cancel{b_2} \varepsilon_{222} + a_2 \cancel{b_3} \varepsilon_{232} + \\ &+ a_3 b_1 \varepsilon_{312} + a_3 b_2 \varepsilon_{322} + a_3 \cancel{b_3} \varepsilon_{332} = \\ &= a_3 b_1 - a_1 b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 &= a_1 \cancel{b_1} \varepsilon_{113} + a_1 b_2 \varepsilon_{123} + a_1 \cancel{b_3} \varepsilon_{133} + \\ &+ a_2 \cancel{b_1} \varepsilon_{213} + a_2 \cancel{b_2} \varepsilon_{223} + a_2 b_3 \varepsilon_{233} + \\ &+ a_3 \cancel{b_1} \varepsilon_{313} + a_3 \cancel{b_2} \varepsilon_{323} + a_3 \cancel{b_3} \varepsilon_{333} = \\ &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned}$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$$

ESERCIZIO 1: Dati i seguenti vettori $u = \{1, 3, 0\}^T$ e $v = \{5, 2, 0\}^T$ e la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, calcolare:

1. $6u + v$
2. $3u - 2v$
3. $u \cdot v$

$$\textcircled{1} \quad 6u + v = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+5 \\ 18+2 \\ 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad 3u - 2v = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-10 \\ 9-4 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad u \cdot v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 5 + 6 + 0 = 11$$

ESERCIZIO 2: Dati i seguenti vettori $u = \{1, 3, 0\}^T$, $v = \{5, 2, 0\}^T$ e $w = \{3, 2, 1\}^T$, si calcoli $(u \otimes v) \cdot w$.

$$(u \otimes v) \cdot w = (v \cdot w) \cdot u$$

$$v \cdot w = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 15 + 4 + 0 = 19$$

$$(v \cdot w) \cdot u = 19 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 57 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 3: Dati i seguenti vettori $u = \{1, 3, 0\}^T$, $v = \{1, 0, 1\}^T$ e $w = \{2, 0, 3\}^T$, la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ si calcoli:

- $[(u - v) \times w] \cdot v$
- $(u \otimes v)(v \times u)$
- $(v + w) \times w - (vu)w$
- $u_i v_j w_k \delta_{ij}$
- $v_j w_k \delta_{ij} \delta_{ik}$
- $v_i w_i v_j w_k + u_j v_k$

$$\textcircled{1} \quad [(u - v) \times w] \cdot v$$

$$(u-v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(u-v) \times w = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = i(9-0) - j(0+2) + k(0-6) \\ = 9i - 2j - 6k = \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$[(u-v) \times w] \cdot v = \begin{bmatrix} 9 & -2 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 9 - 6 = 3$$

② $[u \otimes v][v \times u]$

$$[u \otimes v] = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[v \times u] = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = i(-3) - j(-1) + k(3) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[u \otimes v][v \times u] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+0+3 \\ -9+0+9 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tale risultato lo avremmo potuto prevedere notando che:

$$[u \otimes v][v \times u] = \underbrace{[v \cdot g]}_{=0} \cdot u \quad g \perp u, v$$

③ $\underbrace{\underbrace{(V+W)}_{\text{VET}} \times w}_{\text{VET}} - \underbrace{(V \cdot u)}_{\text{SCAL}} w_{\text{VET}}$

$$(v+w) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$(v+w) \times w = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = i(0) - j(9-8) + k(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(V \cdot U) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$(V \cdot U) W = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(V+W) \times W - (V \cdot U) W = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{4} \quad u_i v_j w_k \delta_{ij} = u_i \underbrace{v_j \delta_{ij}}_{v_i} w_k = u_i v_i w_k = [(u \cdot v) W]_k$$

$$\textcircled{5} \quad v_j w_k \delta_{ij} \delta_{ik} = \underbrace{v_j \delta_{ij}}_{v_i} \underbrace{w_k \delta_{ik}}_{w_i} = v_i w_i = V \cdot W$$

$$\textcircled{6} \quad \underbrace{v_i w_i}_{(V \cdot W)} \underbrace{v_j w_k}_{(V \otimes W)} + \underbrace{u_j v_k}_{(U \otimes V)} = (V \cdot W) (V \otimes W) + (U \otimes V)$$

$\Rightarrow$ il risultato è tensore del II ordine

ESERCIZIO 4: Sapendo che $|F_1| = 15$, $|F_2| = 10$ si calcoli:

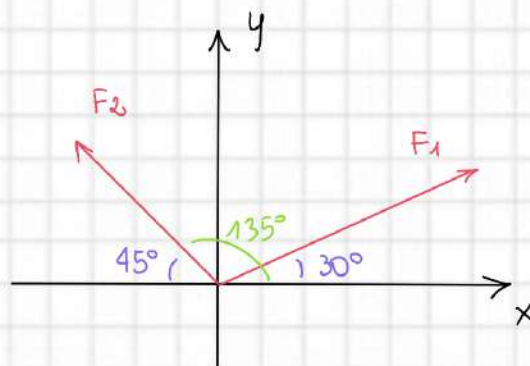
- le componenti di tali forze
- $F = F_1 + F_2$
- $f = F_1 F_2$

$$F_1 = \begin{cases} F_1 \cos 30^\circ = F_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = 15 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ F_1 \sin 30^\circ = \frac{F_1}{2} = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$F_2 = \begin{cases} F_2 \cos 135^\circ = F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -10 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ F_2 \sin 135^\circ = F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 10 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_1 = \begin{bmatrix} 15 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{15}{2} \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \end{bmatrix}$$



$$F_1 + F_2 = \begin{bmatrix} \frac{15\sqrt{3}}{2} \\ \frac{15}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15\sqrt{3}}{2} - 5\sqrt{2} \\ \frac{15}{2} + 5\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$f = F_1 F_2 = \begin{bmatrix} \frac{15\sqrt{3}}{2} & \frac{15}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \end{bmatrix} = -75\sqrt{3}\frac{\sqrt{2}}{2} + 75\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 75\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \sqrt{3})$$

ESERCIZIO 5: Se T è una trasformazione che trasforma qualsiasi vettore di input in un dato vettore n allora T è un tensore del II ordine?

PROPRIETÀ

Verifico se il tensore T rispetta le proprietà di tensore lineare.

$$Ta = n$$

$$Tb = n$$

$$T(a+b) = Ta + Tb$$

$$T(\alpha a) = \alpha Ta$$

$$T(a+b) = n \Rightarrow T(a+b) \neq Ta + Tb \Rightarrow \text{non è un tensore del II ordine}$$

ESERCIZIO 6: Se T è una trasformazione che trasforma qualsiasi vettore di input in un vettore che è k volte il vettore dato allora T è un tensore del II ordine?

$$Ta = ka$$

$$Tb = kb$$

$$T(a+b) = k(a+b) = ka + kb \Rightarrow \text{è un tensore del II ordine}$$

ESERCIZIO 7: Estrarre i componenti del tensore.

$$Te_1 = 4e_1 + e_2$$

$$Te_2 = 2e_1 + 3e_3$$

$$Te_3 = -e_1 + 3e_2 + e_3$$

$$T_{11} = e_1 T e_1 = e_1 (4e_1 + e_2) = 4$$

$$T_{12} = e_1 T e_2 = e_1 (2e_1 + 3e_3) = 2$$

$$T_{13} = e_1 T e_3 = e_1 (-e_1 + 3e_2 + e_3) = -1$$

$$T_{21} = e_2 T e_1 = e_2 (4e_1 + e_2) = 1$$

$$T_{22} = e_2 T e_2 = e_2 (2e_1 + 3e_3) = 0$$

RICORDA

$$T_{ab} = e_a \cdot T e_b$$

$$T_{23} = e_2 T e_3 = e_2 (-e_1 + 3e_2 + e_3) = 3$$

$$T_{31} = e_3 T e_1 = e_3 (4e_1 + e_2) = 0$$

$$T_{32} = e_3 T e_2 = e_3 (2e_1 + 3e_3) = 3$$

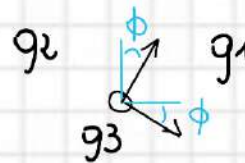
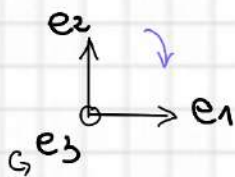
$$T_{33} = e_3 T e_3 = e_3 (-e_1 + 3e_2 + e_3) = 1$$

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 8: Mostrare che nel caso di rotazione attorno al terzo asse, $[Q]$ può essere rappresentata come segue:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ϕ angolo tra g_1 ed e_1



$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$g_1 = \begin{bmatrix} \cos \phi \\ -\sin \phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g_2 = \begin{bmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} g_{1e1} & g_{1e2} & g_{1e3} \\ g_{2e1} & g_{2e2} & g_{2e3} \\ g_{3e1} & g_{3e2} & g_{3e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 9: Dati il tensore A e il vettore u aventi la seguente rappresentazione con la base $\{1, 0\}^T, \{0, 1\}^T$ effettuare un cambio di base con le basi Q_1 (rotazione di 30° dalla base iniziale) e Q_2 (rotazione di 45° dalla base iniziale).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$[A_1] = [Q_1][A][Q_1]^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 \\ -\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \\ -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} + 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \\ -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} + 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} + \sqrt{3} & 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{7}{2} - \sqrt{3} \end{bmatrix} = [A_1]$$

$$\alpha_{11} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} + 1 = \frac{5}{2} + \frac{4\sqrt{3}}{4}$$

$$\alpha_{12} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \sqrt{3} = \frac{8}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha_{21} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} + 3 = \frac{7}{2} - \sqrt{3}$$

$$[A_2] = [Q_2][A][Q_2]^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ \cancel{\emptyset} & 1 \end{bmatrix} = [A_2]$$

$$\beta_{11} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} + 2\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 2 = 5$$

$$\beta_{12} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} + 2\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = -1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 2 = 4$$

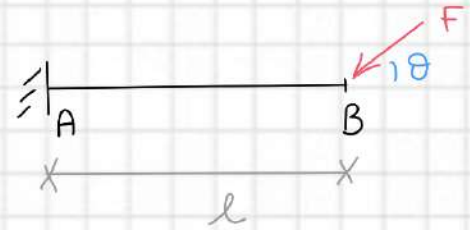
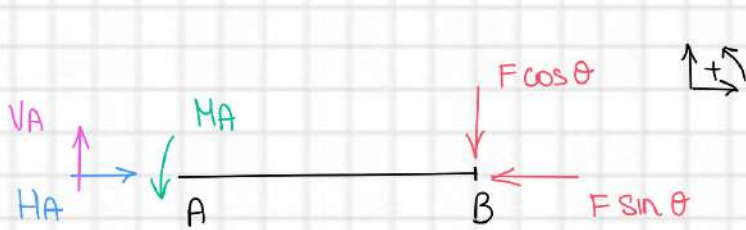
$$\beta_{21} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} + 2\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 2 = \cancel{\emptyset}$$

$$\beta_{22} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} + 2\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 2 = 1$$

$$\{u_1\} = [Q_1]\{u\} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ -\frac{3}{2} + \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\{u_2\} = [Q_2]\{u\} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} + \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 1: Scrivere le reazioni vincolari della seguente struttura in funzione di F, θ, l .



$$\begin{cases} H_A - F \sin \theta = 0 \\ V_A - F \cos \theta = 0 \\ M_A - F l \cos \theta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = F \sin \theta \\ V_A = F \cos \theta \\ M_A = F l \cos \theta \end{cases}$$

ESERCIZIO 1: Rivedere l'analisi cinematica dell'esercizio svolto in classe usando il metodo ispettivo, grafico e analitico.

Formula $[3t - s = l - i]$

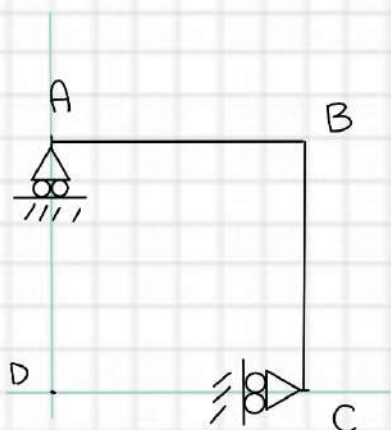
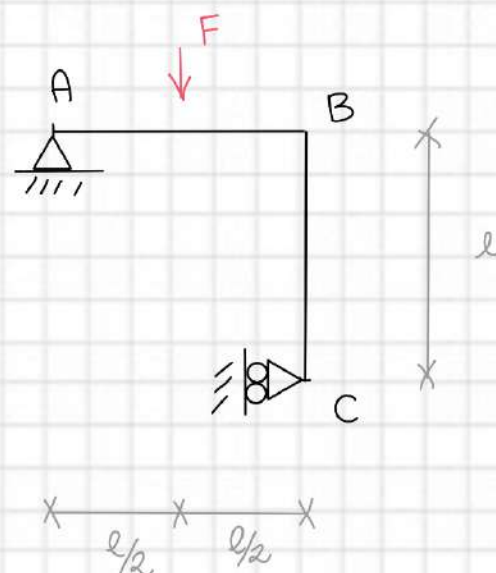
$$t = 1$$

$$\Rightarrow 3t - s = 0 \Rightarrow l - i = 0$$

$$s = 3$$

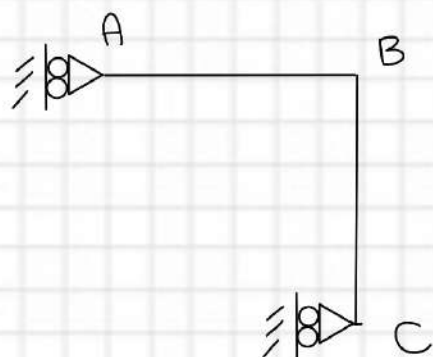
Metodo ispettivo

Degrado la struttura e verifico se viene introdotta labilità:



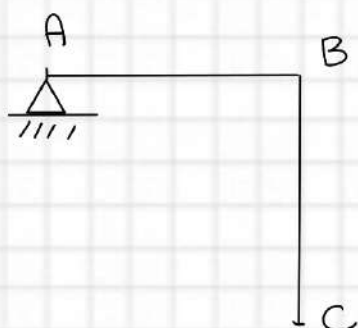
la struttura può ruotare attorno a un punto D

$$l = 1$$



la struttura può traslare verticalmente

$$l = 1$$



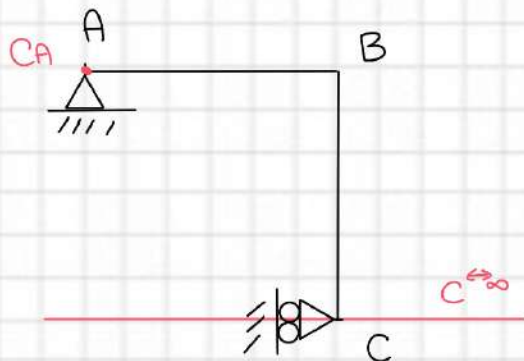
la struttura può ruotare attorno ad A

$$l = 1$$

Eliminando i vincoli sono stati introdotti dei cinematismi $\Rightarrow$ tutti i vincoli sono utili $\Rightarrow i = 0 \Rightarrow l = 0$

$\rightarrow$ struttura isostatica

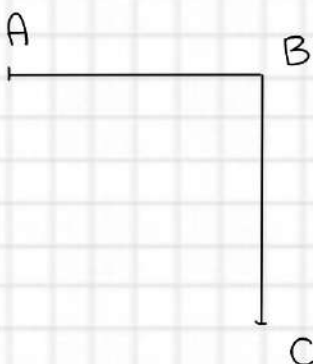
Metodo grafico [centri di rotazione]



L'asse del carrello non passa per la cerniera $\Rightarrow$ la struttura non ha un centro di rotazione quindi non è dotata di cinematismi $\Rightarrow l = 0$

Metodo analitico

struttura senza vincoli



gdl

u_A, v_A, ϕ_A

equazioni di vincolo

vincolo cerniera in A

$$u_A = 0$$

$$v_A = 0$$

vincolo carrello a scorrimento verticale in C

$$u_C = 0$$

equazioni in funzione dei gdl

$$\begin{cases} u_A = 0 & \text{OK} \\ v_A = 0 & \text{OK} \\ u_C = u_A - l \phi_A = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ u_A - l \phi_A = 0 \end{cases}$$

sistema lineare

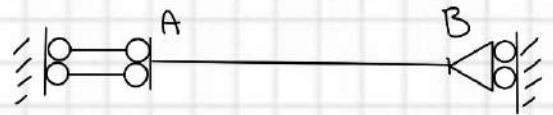
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -l \end{bmatrix} = -l \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$$

$$l = \dim(A) - \text{rg}(A) = 0 \rightarrow \text{struttura isostatica}$$

ESERCIZIO 2: Fare l'analisi cinematica della seguente struttura.

Formula $[3t - s = l - i]$



$$t = 1$$

$$s = 3 \Rightarrow 3t - s = 0 \Rightarrow l - i = 0$$

Metodo grafico [centri di rotazione]



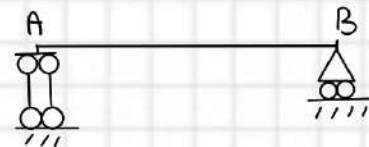
i centri di rotazione si incontrano all'infinito $\Rightarrow$ struttura dotata di cinematismi

ESERCIZIO 3: Fare l'analisi cinematica della seguente struttura.

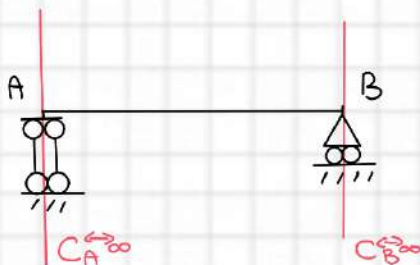
Formula $[3t - s = l - i]$

$$t = 1$$

$$s = 3 \Rightarrow 3t - s = 0 \Rightarrow l - i = 0$$



Metodo grafico [centri di rotazione]



i centri di rotazione si incontrano all'infinito $\Rightarrow$ struttura dotata di cinematismi

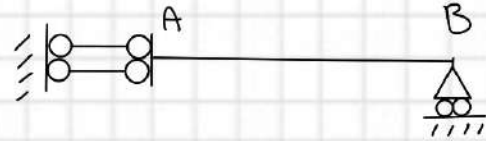
ESERCIZIO 4: Fare l'analisi cinematica della seguente struttura.

Formula $[3t - s = l - i]$

$$t = 1$$

$$3t - s = 0 \Rightarrow l - i = 0$$

$$s = 3$$



Metodo analitico

struttura senza vincoli



gdl

$$u_A, N_A, \phi_A$$

equazioni di vincolo

vincolo doppio pendolo ad asse orizzontale in A

$$u_A = 0$$

$$\phi_A = 0$$

vincolo carrello a scorrimento orizzontale in B

$$N_B = 0$$

equazioni in funzione dei gdl

$$u_A = 0 \quad \text{OK}$$

$$\phi_A = 0 \quad \text{OK}$$

$$N_B = N_A + l \phi_A = 0$$

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ \phi_A = 0 \\ N_A + l \phi_A = 0 \end{cases}$$

sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ N_A \\ \phi_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

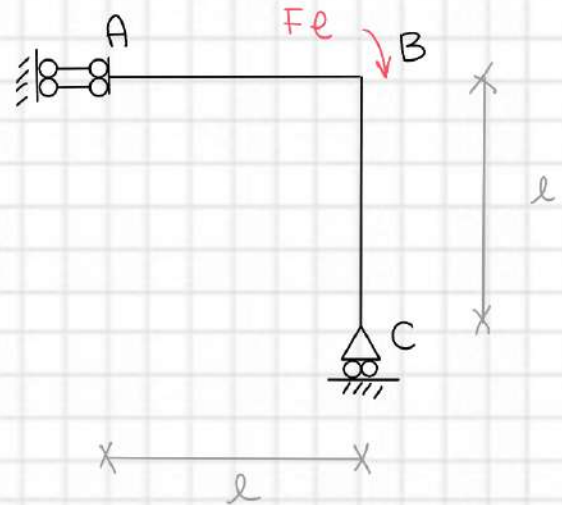
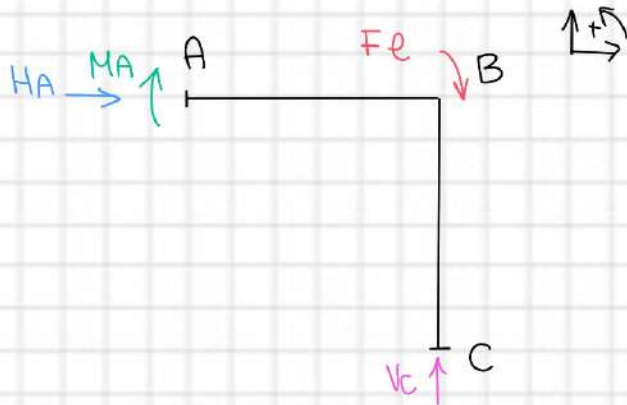
$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & l \end{bmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & l \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$l = \dim(A) - \text{rank}(A) = 0$$

→ struttura isostatica

ESERCIZIO 5: Risolvere l'analisi statica della seguente struttura scrivendo le equazioni di equilibrio.

reazioni vincolari

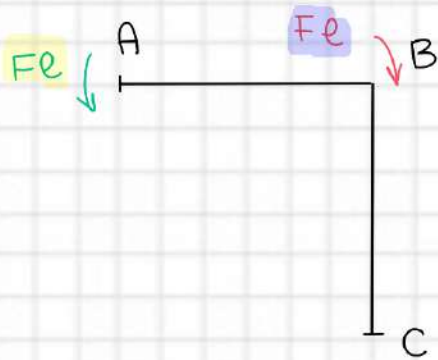


equazioni di equilibrio (polo C)

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_C = 0 \\ -M_A - H_A l - F l = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_C = 0 \\ M_A = -F l \end{cases}$$

struttura con reazioni vincolari



verifica

$$\sum F_x = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum M_A = 0 \quad F l - F l = 0 \quad \text{OK!}$$

ESERCIZIO 6: Fare l'analisi cinematica con il metodo analitico e l'analisi statica della seguente struttura.

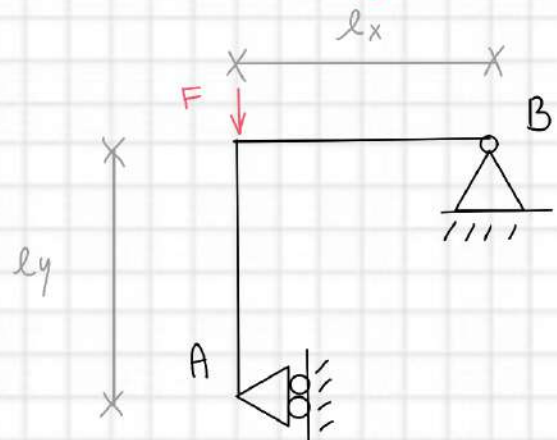
ANALISI CINEMATICA

Formula $[3t - s = l - i]$

$$t = 1$$

$$s = 3$$

$$3t - s = 0 \Rightarrow l - i = 0$$

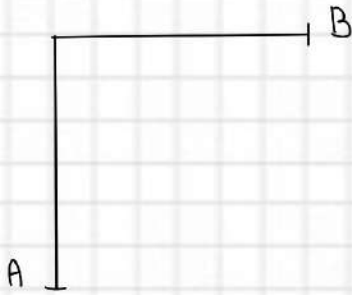


Metodo analitico

struttura senza vincoli

gdl

$$u_B, v_B, \phi_B$$



equazioni di vincolo

vincolo carrello a scorrimento verticale in A $u_A = 0$

vincolo cerniera in B $u_B = 0$

$$v_B = 0$$

equazioni in funzione dei gdl

$$\begin{cases} u_A = u_B - \phi_B l = 0 \\ u_B = 0 \quad \text{ok} \\ v_B = 0 \quad \text{ok} \end{cases} \quad \begin{cases} -\phi_B l = 0 \\ u_B = 0 \\ v_B = 0 \end{cases}$$

sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -l \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ v_B \\ \phi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

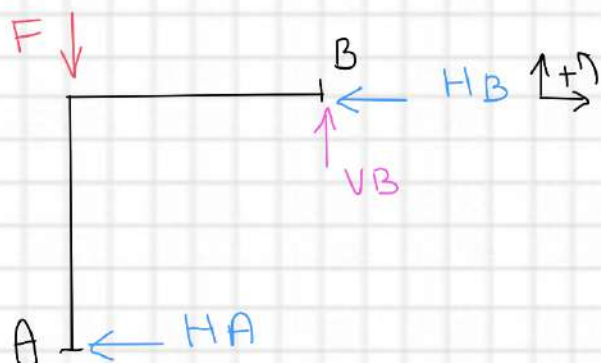
$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & -l \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -l \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\ell = \dim(A) - \text{rg}(A) = 0$$

→ struttura isostatica

ANALISI STATICA

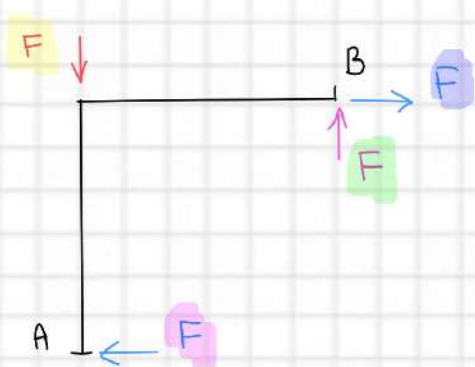
reazioni vincolari



equazioni di equilibrio (polo B)

$$\begin{cases} -H_A - H_B = 0 \\ V_B - F = 0 \\ F \ell - H_A \ell = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_B = -F \\ V_B = F \\ H_A = F \end{cases}$$

struttura con reazioni vincolari



verifica

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & F - F &= 0 & \text{ok!} \\ \sum F_y &= 0 & F - F &= 0 & \text{ok!} \\ \sum M_A &= 0 & -F\ell + F\ell &= 0 & \text{ok!} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 7: Fare l'analisi cinematica con il metodo analitico e l'analisi statica della seguente struttura.

ANALISI CINEMATICA

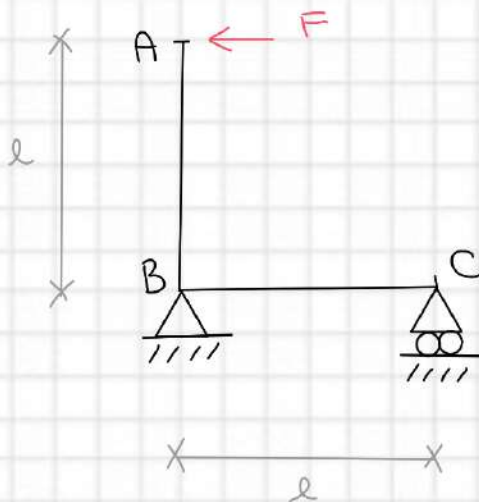
Formula $[3t - s = l - i]$

$$t = 1$$

$$\Rightarrow 3t - s = 0$$

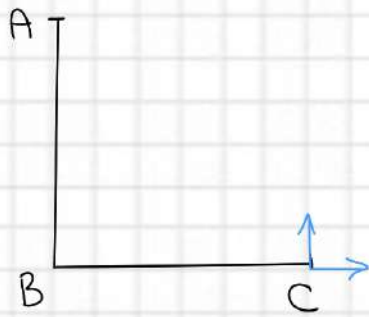
$$s = 3$$

$$\Rightarrow l - i = 0$$



Metodo analitico

struttura senza vincoli



gdl

$$u_C, v_C, \phi_C$$

equazioni di vincolo

vincolo cerniera in B

$$u_B = 0$$

$$v_B = 0$$

vincolo carrello a scorrimento orizzontale in C

$$v_C = 0$$

equazioni in funzione dei gdl

$$u_B = u_C - (y_B - y_C)\phi_C = u_C = 0$$

$$v_B = v_C + (x_B - x_C)\phi_C = v_C - l\phi_C$$

$$v_C = 0 \quad \text{ok}$$

$$\begin{cases} u_C = 0 \\ v_C = 0 \\ -l\phi_C = 0 \end{cases}$$

sistema lineare

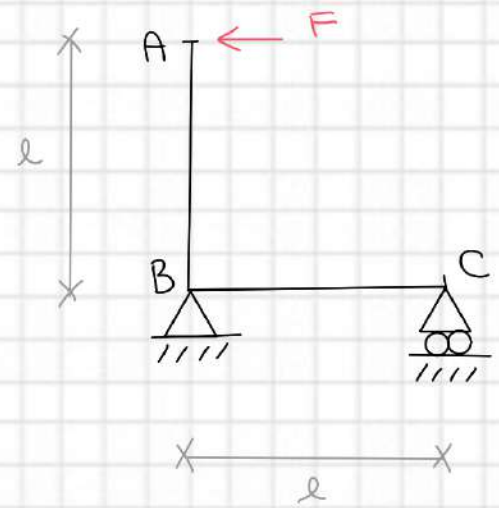
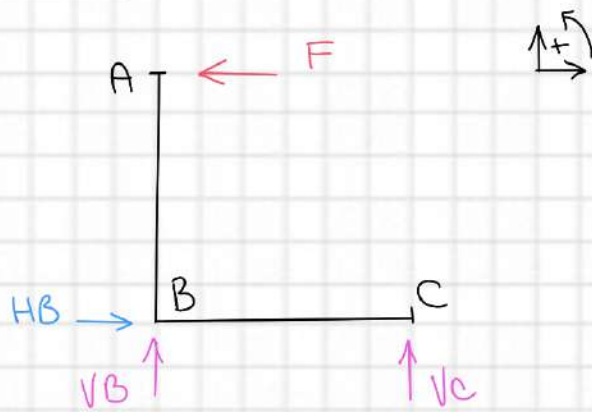
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ \phi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -l \end{bmatrix} = -l \neq 0$$

$$l = \dim(A) - \text{rg}(A) = 0 \quad \rightarrow \text{struttura isostatica}$$

ANALISI STATICA

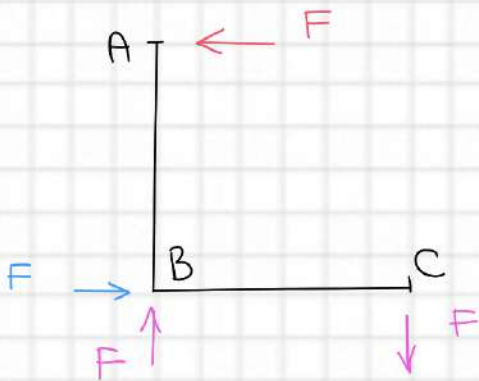
reazioni vincolari



equazioni di equilibrio (polo B)

$$\begin{cases} H_B - F = 0 \\ V_B + V_C = 0 \\ F \cdot l + V_C \cdot l = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_B = F \\ V_B = F \\ V_C = -F \end{cases}$$

struttura con reazioni vincolari



verifica

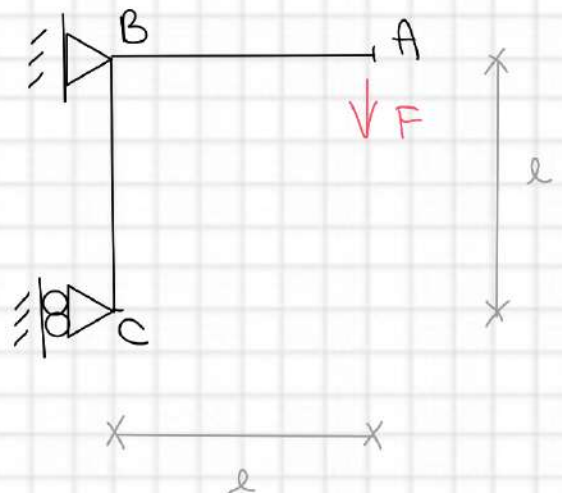
$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & F - F &= 0 & \text{ok!} \\ \sum F_y &= 0 & F - F &= 0 & \text{ok!} \\ \sum M_C &= 0 & -F \cdot l + F \cdot l &= 0 & \text{ok!} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 8: Fare l'analisi cinematica con il metodo analitico e l'analisi statica della seguente struttura.

ANALISI CINEMATICA

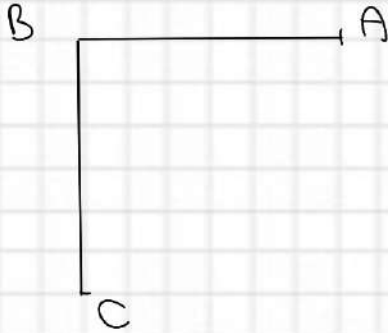
Formula $[3t - s = l - i]$

$$\begin{aligned} t &= 1 \\ s &= 3 \\ \Rightarrow 3t - s &= 0 \\ \Rightarrow l - i &= 0 \end{aligned}$$



Metodo analitico

struttura senza vincoli



gdl

$$u_B, v_B, \phi_B$$

equazioni di vincolo

vincolo cerniera in B

$$u_B = 0$$

$$v_B = 0$$

vincolo carrello a scorrimento verticale in C

$$u_C = 0$$

equazioni in funzione dei gdl

$$u_B = 0 \quad \text{OK}$$

$$v_B = 0 \quad \text{OK}$$

$$u_C = u_B - (y_C - y_B)\phi_B = u_B + l\phi_B = 0$$

$$\begin{cases} u_B = 0 \\ v_B = 0 \\ l\phi_B = 0 \end{cases}$$

sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ v_B \\ \phi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

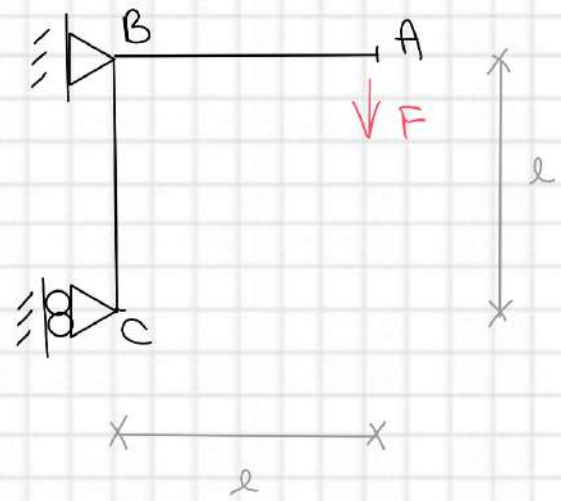
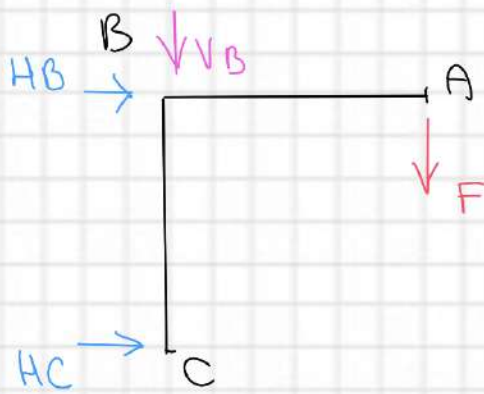
$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix} = l \neq 0$$

$$l = \dim(A) - \text{rg}(A) = 0 \quad \rightarrow \text{struttura isostatica}$$

OSS: l'analisi cinematica è la stessa della struttura dell'esercizio precedente dato che la struttura è la stessa ma ruotata.

ANALISI STATICA

reazioni vincolari

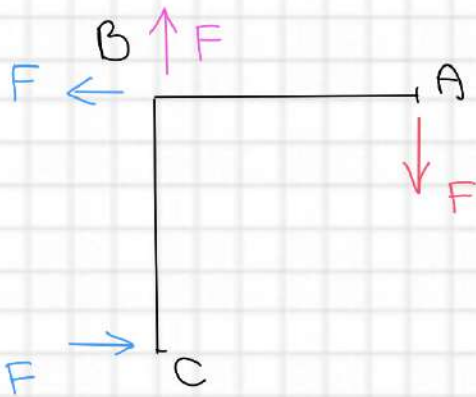


equazioni di equilibrio (polo B)

$$\begin{cases} H_B + H_C = 0 \\ -V_B - F = 0 \\ H_C l - F l = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_B = -F \\ V_B = -F \\ H_C = F \end{cases}$$

struttura con reazioni vincolari



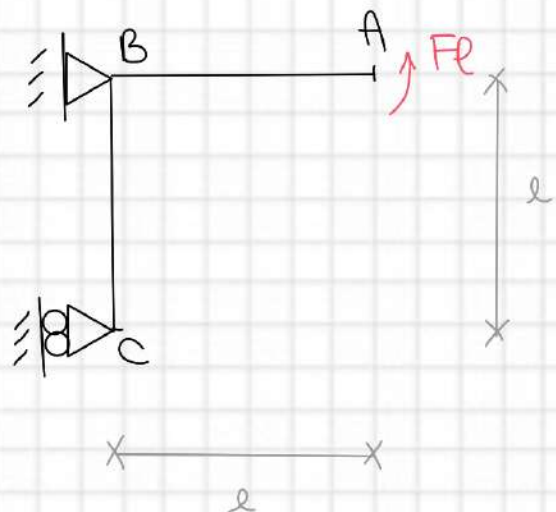
verifica

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & F - F &= 0 & \text{OK!} \\ \sum F_y &= 0 & F - F &= 0 & \text{OK!} \\ \sum M_C &= 0 & F l - F l &= 0 & \text{OK!} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 9: Fare l'analisi cinematica con il metodo analitico e l'analisi statica della seguente struttura.

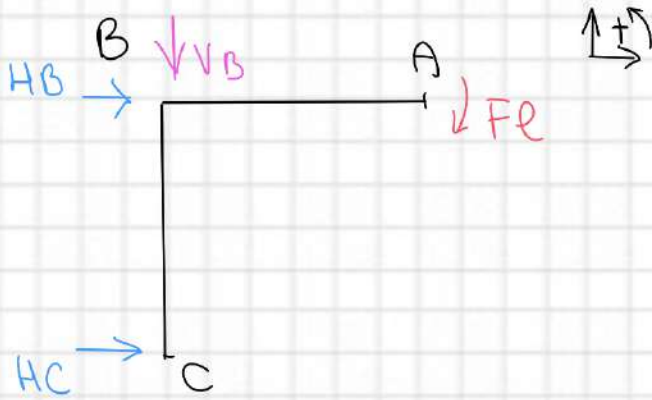
ANALISI CINEMATICA

La struttura è la stessa dell'esercizio precedente
 $\Rightarrow$ struttura isostatica



ANALISI STATICA

reazioni vincolari

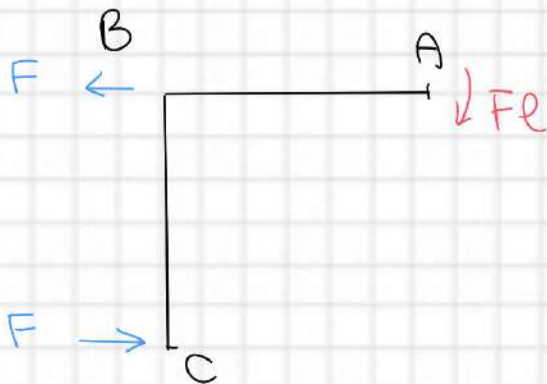


equazioni di equilibrio (polo B)

$$\begin{cases} H_B + H_C = 0 \\ -V_B = 0 \\ H_C \ell - F \ell = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_B = -F \\ V_B = 0 \\ H_C = F \end{cases}$$

struttura con reazioni vincolari



verifica

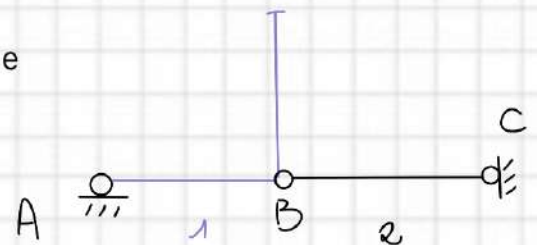
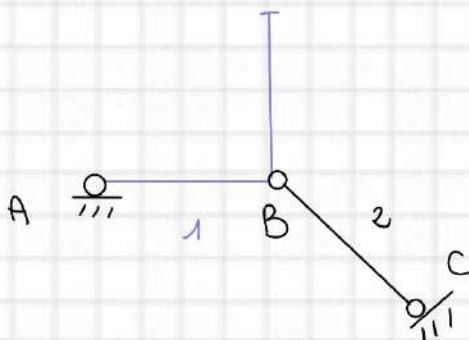
$$\sum F_x = 0 \quad F - F = 0 \quad \text{Ok!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \text{Ok!}$$

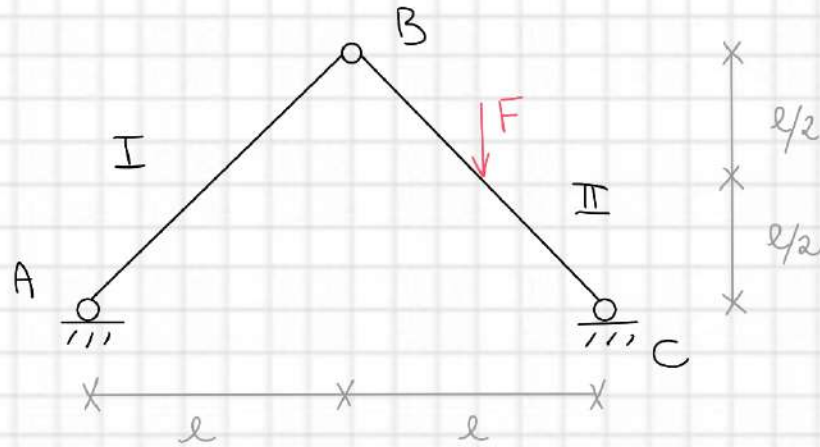
$$\sum M_C = 0 \quad F \ell - F \ell = 0 \quad \text{Ok!}$$

ESERCIZIO 10: Data la seguente struttura trovare una configurazione isostatica cambiando l'asta 2.

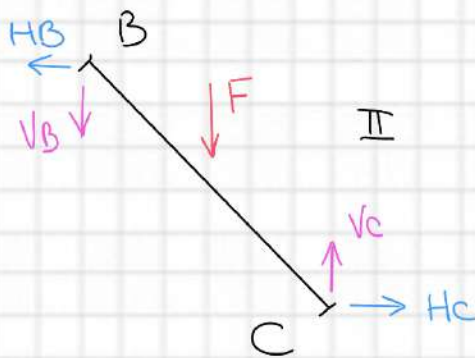
Per rendere la configurazione isostatica posso cambiare la direzione dell'asta 2 $\rightarrow$ i centri di rotazioni non risultano più allineati:



ESERCIZIO 1: Ripetere l'esercizio svolto in aula considerando, per le equazioni di equilibrio, l'asta II e la struttura globale.



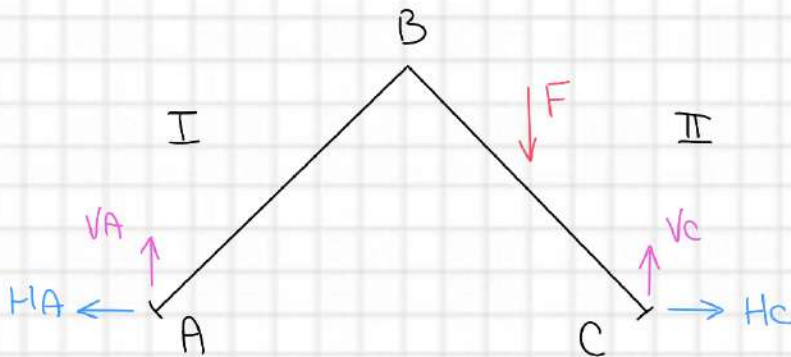
reazioni vincolari



equazioni di equilibrio (polo C)



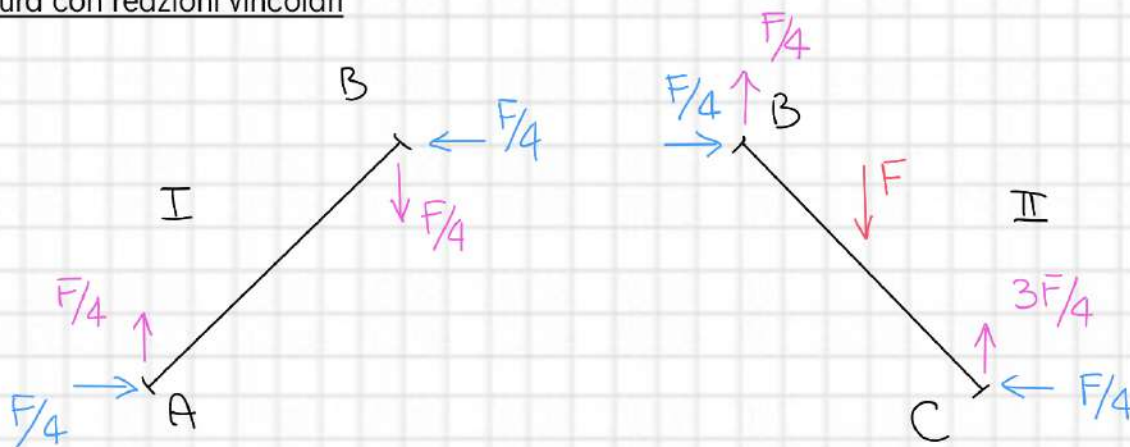
$$\begin{cases} -H_B + H_C = 0 \\ -V_B - F + V_C = 0 \\ +F\frac{l}{2} + V_B l + H_B l = 0 \end{cases}$$



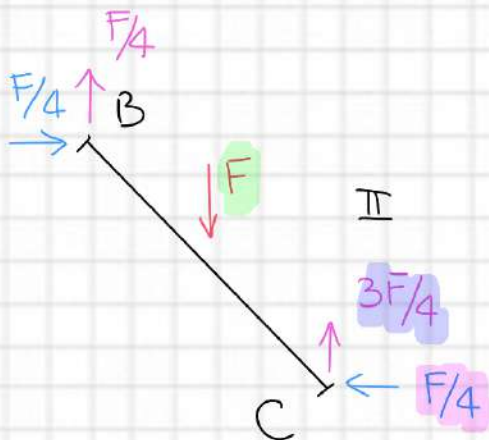
$$\begin{cases} -H_A + H_C = 0 \\ V_A + V_C - F = 0 \\ -V_A 2l + F\frac{l}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_B = H_C \\ V_B = V_C - F \\ H_B = -V_B - \frac{F}{2} \\ H_A = H_C \\ V_C = -V_A + F \\ V_A = \frac{F}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} H_C = -\frac{F}{4} \\ V_B = -\frac{F}{4} \\ H_B = -\frac{F}{4} \\ H_A = -\frac{F}{4} \\ V_C = \frac{3}{4}F \\ V_A = \frac{F}{4} \end{cases}$$

struttura con reazioni vincolari



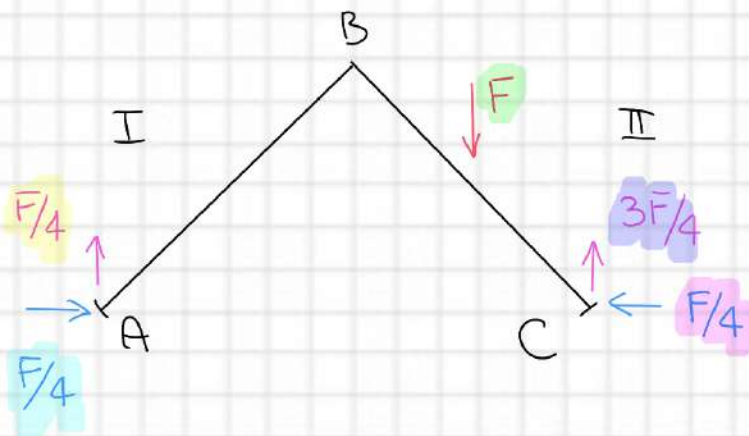
verifica



$$\sum F_x = 0 \quad \frac{F}{4} - \frac{F}{4} = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \frac{F}{4} + \frac{3F}{4} - F = 0 \quad \text{OK}$$

$$\sum M_B = 0 \quad -\frac{F}{2}l + \frac{3F}{4}l - \frac{F}{4}l = 0 \quad \text{OK!}$$



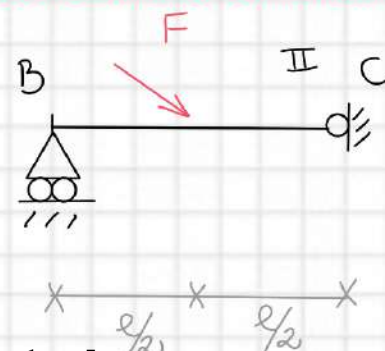
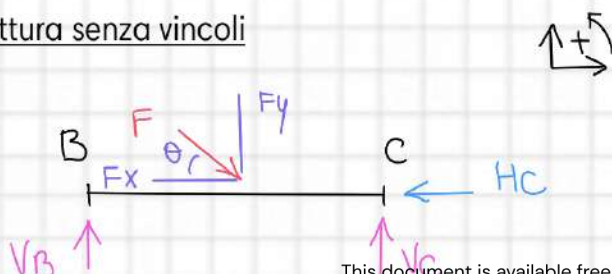
$$\sum F_x = 0 \quad \frac{F}{4} - \frac{F}{4} = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \frac{F}{4} + \frac{3F}{4} - F = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum M_B = 0 \quad -\frac{F}{4}l + \frac{F}{4}l - \frac{F}{2}l + \frac{3F}{4}l - \frac{F}{4}l = 0 \quad \text{OK!}$$

ESERCIZIO 2: Verificare che l'equilibrio trovato nell'esercizio precedente coincida con la soluzione di questo caso.

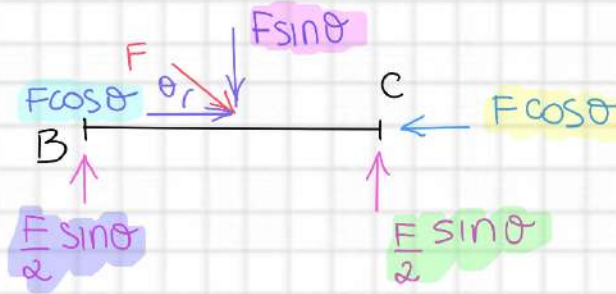
struttura senza vincoli



equazioni di equilibrio (polo B)

$$\begin{cases} -H_c + F_x = 0 \\ V_B - F_y + V_c = 0 \\ -F_y \frac{l}{2} + V_c l = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_c = F \cos \theta \\ V_B = \frac{F}{2} \sin \theta \\ V_c = \frac{F}{2} \sin \theta \end{cases}$$

struttura con reazioni vincolari



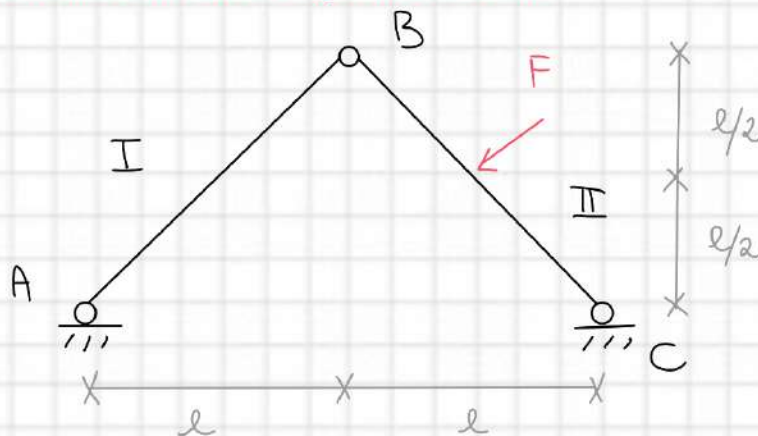
verifica

$$\sum F_x = 0 \quad -F \cos \theta + F \cos \theta = 0 \quad \text{ok!}$$

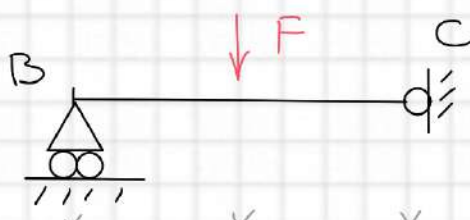
$$\sum F_y = 0 \quad -F \sin \theta + \frac{F}{2} \sin \theta + \frac{F}{2} \sin \theta = 0 \quad \text{ok!}$$

$$\sum M_c = 0 \quad F \sin \theta \frac{l}{2} - \frac{F}{2} \sin \theta l = 0 \quad \text{ok!}$$

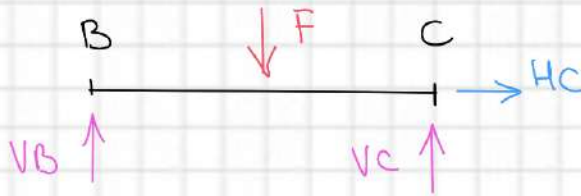
ESERCIZIO 3: Fare l'analisi statica della seguente struttura.



Posso ruotare la struttura e l'equilibrio non cambia. Inoltre, noto che l'asta I è una biella per l'asta II; posso quindi sostituirla con un vincolo carrello:



reazioni vincolari



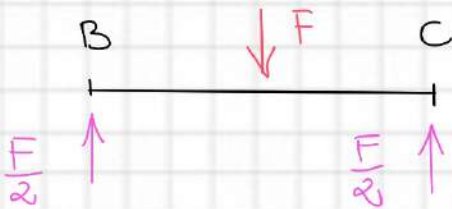
equazioni di equilibrio (polo B)

$$\begin{cases} H_c = 0 \\ V_B - F + V_C = 0 \\ -F \frac{l}{2} + V_C l = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_c = 0 \\ V_B = F - \frac{F}{2} \\ V_C l = F \frac{l}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_c = 0 \\ V_B = \frac{F}{2} \\ V_C = \frac{F}{2} \end{cases}$$

struttura senza vincoli



verifica

$$\sum F_x = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \frac{F}{2} - F + \frac{F}{2} = 0 \quad \text{OK!}$$

$$\sum M_C = 0 \quad F \frac{l}{2} + \frac{F}{2} l = 0 \quad \text{OK!}$$

ESERCIZIO 4: Rieseguo l'esercizio svolto in aula sulla cinematica considerando i termini nulli nel sistema.

Formula $[3t - s = l - i]$

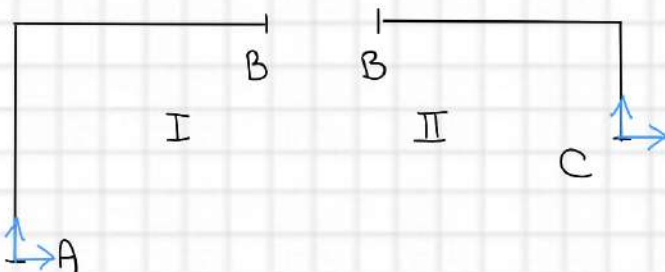
$$t = 2$$

$$s = 6 \Rightarrow 3t - s = 0$$

$$\Rightarrow l - i = 0$$

Metodo analitico

struttura senza vincoli



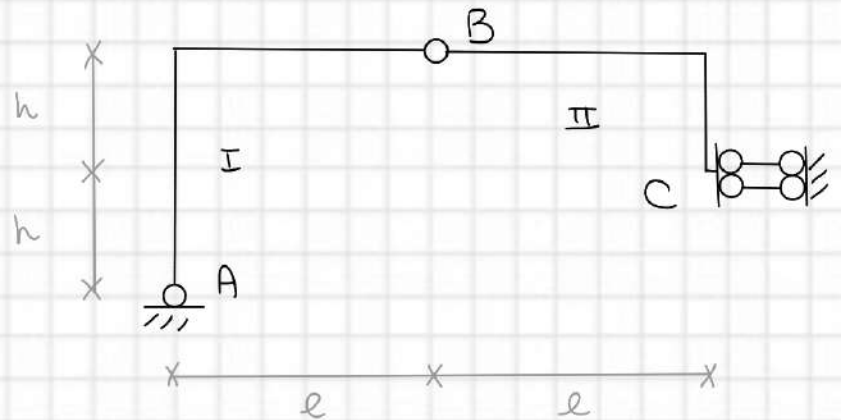
equazioni di vincolo

vincolo cerniera in A

$$U_A = 0$$

vincolo cerniera interna in B

This document is available free of charge on



gdl

$$U_A, N_A, \phi_A, U_C, N_C, \phi_C$$

$$u_B^I = u_B^{II}$$

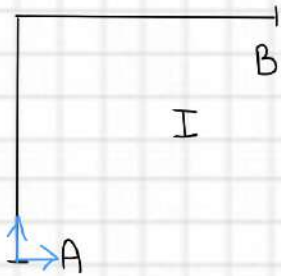
$$N_B^I = N_B^{II}$$

$$u_C = 0$$

$$\phi_C = 0$$

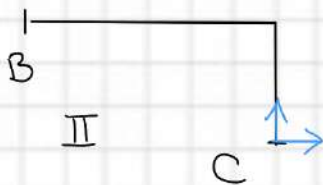
vincolo doppio pendolo ad asse orizzontale in C

equazioni in funzione dei gdl



$$u_B^I = u_A - 2h\phi_A$$

$$N_B^I = N_A + l\phi_A$$



$$u_B^{II} = u_C - h\phi_C$$

$$N_B^{II} = N_C - l\phi_C$$

Si ha quindi:

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ N_A = 0 \\ u_A - 2h\phi_A - u_C + h\phi_C = 0 \\ N_A + l\phi_A - N_C + l\phi_C = 0 \\ u_C = 0 \\ \phi_C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ N_A = 0 \\ -2h\phi_A \\ l\phi_A - N_C \\ u_C = 0 \\ \phi_C = 0 \end{cases}$$

sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ N_A \\ \phi_A \\ u_C \\ N_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rendo la matrice **A** triangolare: inverto colonna 4 e 5 (det cambia di segno).

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -2h \rightarrow \text{la struttura è isostatica se } h > 0$$

Se $h = 0$ la struttura è così rappresentata:

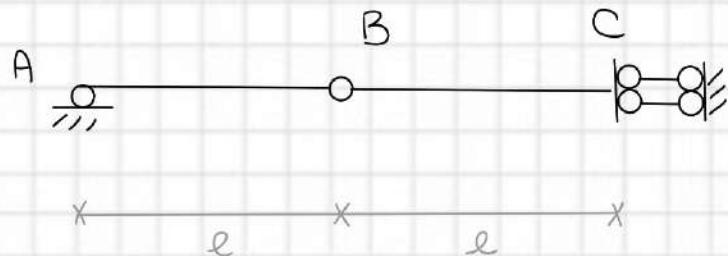
Formula $[3t - s = l - i]$

$$t = 2$$

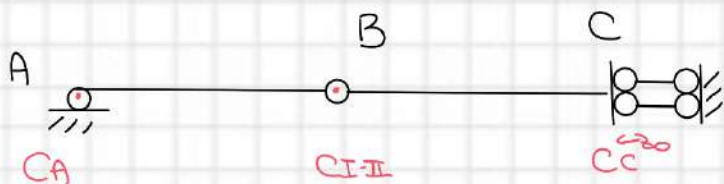
$$\Rightarrow 3t - s = 0$$

$$s = 6$$

$$\Rightarrow l - i = 0$$



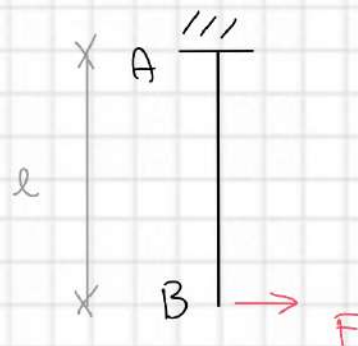
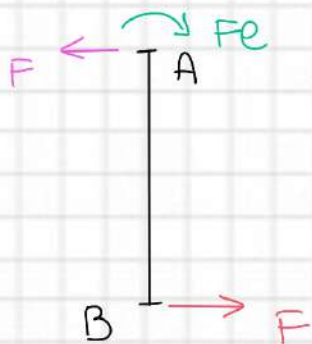
Metodo grafico [centri di rotazione]



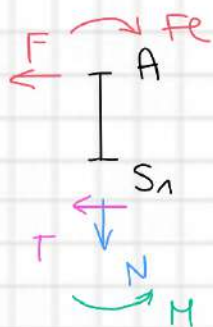
Il centro di rotazione del tratto I è in A, quello del tratto II si trova in un punto all'infinito della retta orizzontale mentre quello del tratto I rispetto al tratto II si trova in B. Essendo i tre centri allineati, la struttura è dotata di labilità.

ESERCIZIO 1: verificare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione delle seguente struttura.

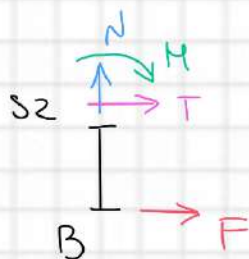
ANALISI STATICA



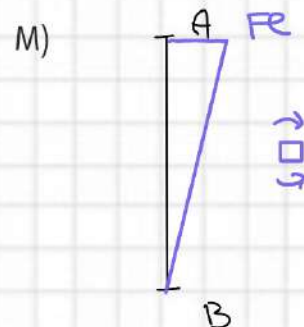
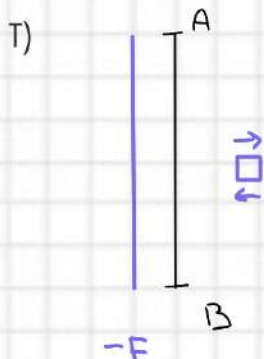
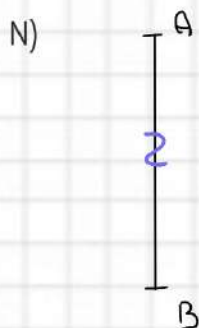
CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE $\leftarrow \uparrow \uparrow \square \downarrow \uparrow \rightarrow \quad \uparrow \curvearrowright$



$$\begin{cases} N = 0 \\ -T - F = 0 \\ -Fe + M - Tx = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} N = 0 \\ T = -F \\ M = Fe - Fx \\ \quad = F(l - x) \end{cases}$$

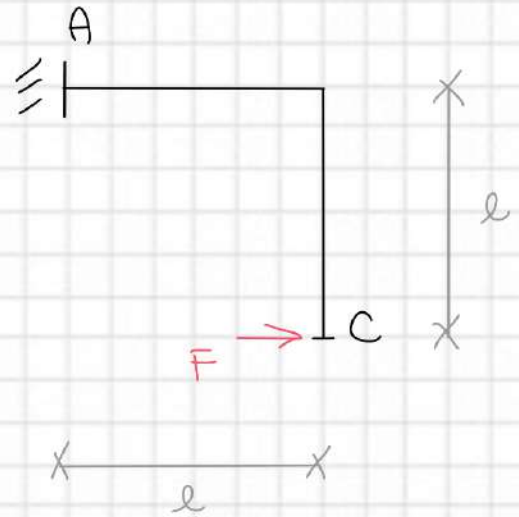
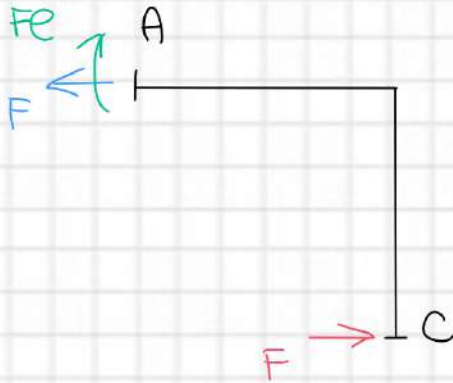


$$\begin{cases} -N = 0 \\ T + F = 0 \\ -M - Tx = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} N = 0 \\ T = -F \\ M = Fx \end{cases}$$



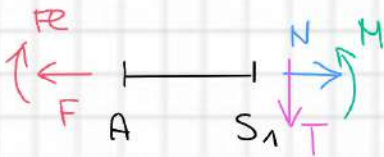
ESERCIZIO 2: verificare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione delle seguente struttura.

ANALISI STATICA

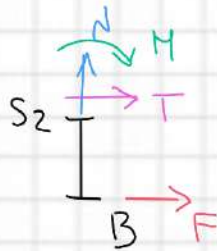


CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

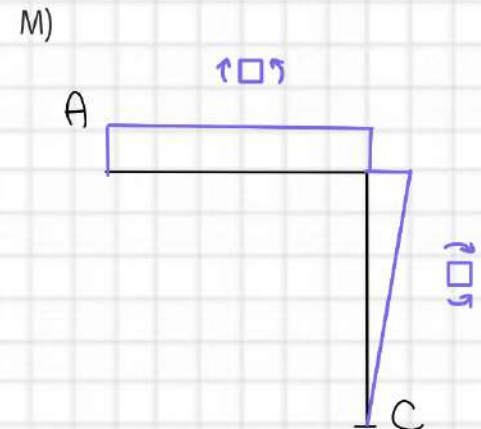
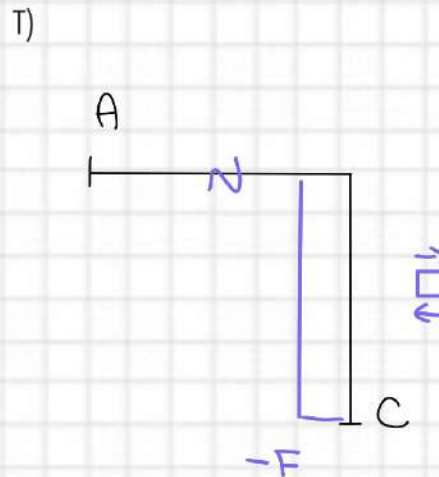
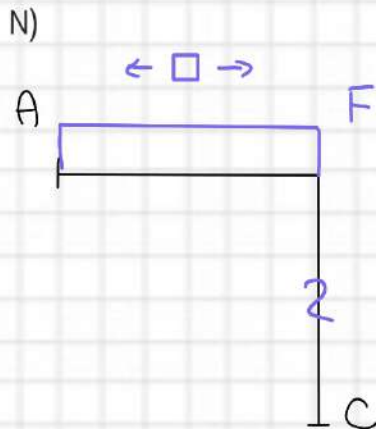
← ↑ ↑ □ ↓ ↑ → ↺ ↻



$$\begin{cases} N - F = 0 \\ -T = 0 \\ -F\ell + M - Tx = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} N = F \\ T = 0 \\ M = F\ell \end{cases}$$



$$\begin{cases} N = 0 \\ T = -F \\ -Tx - M = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} N = 0 \\ T = -F \\ M = Fx \end{cases}$$



ESERCIZIO 1: Eseguire nuovamente l'esercizio svolto in aula (asta caricata di punta) modificando le condizioni al bordo.



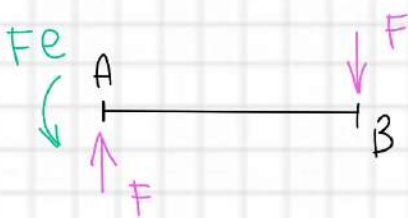
$$\begin{cases} EI v'''' = q(x) = 0 \\ EI v''' = C_1 \\ EI v'' = C_1 x + C_2 \\ EI v' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \\ EI v = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \end{cases}$$

CONDIZIONI AL BORDO

$$v(0) = 0$$

$$\theta(0) = 0 = v'(0)$$

$$\leftarrow \uparrow \uparrow \boxed{+} \downarrow \rightarrow$$



$$T(l) = F$$

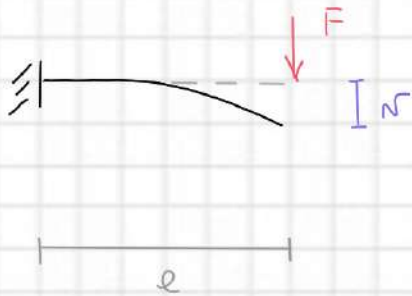
$$M(0) = -Fe$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = F \\ C_2 = -Fe \\ C_3 = 0 \\ C_4 = 0 \end{cases}$$

$$v = \frac{1}{EI} \left(F \frac{x^3}{6} - \frac{Fe x^2}{2} \right)$$

$$v(l) = \frac{1}{EI} \left(\frac{Fl^3}{6} - \frac{Fe l^2}{2} \right) = - \frac{Fe^3}{3EI}$$

ESERCIZIO 2: Un'asta incastrata ad un'estremità, lunga 1 m, con sezione quadrata e spessa 10 cm, si abbassa di 3.2 mm quando viene caricata in punta con un peso di 80 kg. Sfruttando l'equazione della linea elastica ed assumendo $E = 10 \text{ GPa}$, indicare di quanto si deve allargare la sezione trasversale dell'asta per ridurne l'abbassamento del 33%.



$$l = 1 \text{ m}$$

? b

$$b = h = 10 \text{ cm}$$

$$\delta = 3.2 \text{ mm}$$

$$m = 80 \text{ kg}$$

$$E = 10 \text{ GPa}$$

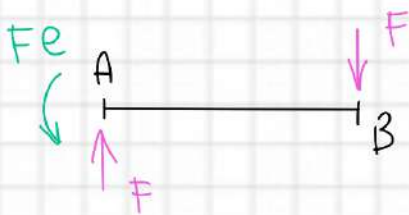
$$\begin{cases} EI \delta'''' = 0 \\ EI \delta''' = C_1 \\ EI \delta'' = C_1 x + C_2 \\ EI \delta' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \\ EI \delta = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \end{cases}$$

CONDIZIONI AL BORDO

$$\delta(0) = 0$$

$$\theta(0) = 0 = \delta'(0)$$

$$\leftarrow \uparrow \uparrow \oplus \downarrow \rightarrow$$



$$T(l) = F$$

$$M(0) = -Fe$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = F \\ C_2 = -Fe \\ C_3 = \emptyset \\ C_4 = \emptyset \end{cases}$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \left(F \frac{x^3}{6} - Fe \frac{x^2}{2} \right)$$

$$N(e) = \frac{1}{EI} \left(\frac{Fe^3}{6} - \frac{Fe^3}{2} \right) = - \frac{Fe^3}{3EI}$$

$$\tilde{N} = 0,33 \cdot 3,2 \approx 1 \text{ mm}$$

$$+ \tilde{N} = + \frac{Fe^3}{3EI} \rightarrow I = \frac{Fe^3}{3E\tilde{N}}$$

$$\left. \begin{array}{l} F = m \cdot g = 800 \text{ N} \\ l = 1 \text{ m} \\ E = 10^{10} \text{ Pa} \\ \hat{N} = 10^{-3} \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow I = \frac{8}{3} \frac{10^2}{10^{10} \cdot 10^{-3}} = 2,6 \cdot 10^5 [\text{kg m}^2]$$

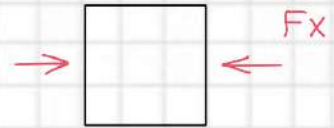
$$I = \frac{b^3 h}{12} = \frac{b^4}{12} \rightarrow b^4 = 12 I \rightarrow \tilde{b} = \sqrt[4]{12 \cdot 2,6 \cdot 10^5} = 0,13 \text{ m}$$

$$a = \tilde{b} - b = 0,13 - 0,1 = 0,03 \text{ m}$$

Si deve allargare l'asta di 0,03 m.

ESERCIZIO 1: Trovare le dimensioni del cubetto deformato.

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{F_x}{A} = -\frac{F}{l^2} \\ \sigma_y = 0 \\ \sigma_z = 0 \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) \\ \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) \\ \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \end{cases} \quad \begin{cases} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \\ \epsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_x \\ \epsilon_z = -\frac{\nu}{E} \sigma_x \end{cases}$$

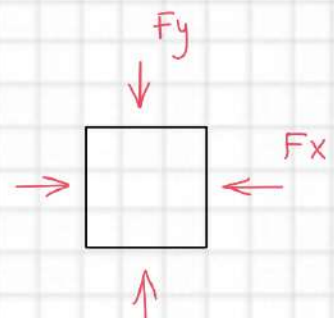
$$\tilde{l}_x = l(1 + \epsilon_x)$$

$$\tilde{l}_y = l(1 + \epsilon_y)$$

$$\tilde{l}_z = l(1 + \epsilon_z)$$

ESERCIZIO 2: Trovare le dimensioni del cubetto deformato.

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{F_x}{A} = -\frac{F}{l^2} \\ \sigma_y = -\frac{F_y}{A} = -\frac{F}{l^2} \\ \sigma_z = 0 \end{cases}$$



$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \end{cases}$$

$$\tilde{l}_x = l(1 + \varepsilon_x)$$

$$\tilde{l}_y = l(1 + \varepsilon_y)$$

$$\tilde{l}_z = l(1 + \varepsilon_z)$$

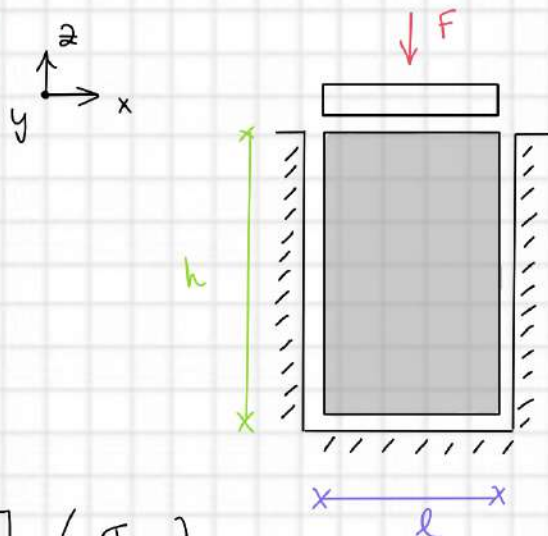
ESERCIZIO 3: Verificare che $\sigma_x = \sigma_y$ nell'ES3 degli appunti.

hp:

$$\varepsilon_z \neq 0$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z \neq 0$$



$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \phi = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{cases}$$

$$\sigma_x = \nu(\sigma_y + \sigma_z) = \nu\sigma_y + \nu\sigma_z$$

$$\sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z) = \nu(\nu\sigma_y + \nu\sigma_z + \sigma_z) = \nu^2\sigma_y + \nu^2\sigma_z + \nu\sigma_z$$

$$\Rightarrow \sigma_y(1 - \nu^2) = \nu\sigma_z(1 + \nu)$$

$$\Rightarrow \sigma_y = \nu\sigma_z \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu^2)} = \nu\sigma_z \frac{(1 + \nu)}{(1 + \nu)(1 - \nu)} = \frac{\nu\sigma_z}{1 - \nu}$$

$$\sigma_x = \nu^2 \frac{\sigma_z}{1 - \nu} + \nu\sigma_z = \nu\sigma_z \left(\frac{\nu}{1 - \nu} + 1 \right) = \nu\sigma_z \left(\frac{\nu + 1 - \nu}{1 - \nu} \right) = \frac{\nu\sigma_z}{1 - \nu}$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \sigma_y \quad \checkmark$$

ESERCIZIO 1: Trovare un esempio di un materiale che sia biomateriale in un contesto e che non lo sia in un altro.

L'acciaio inox è una lega ferrosa composta principalmente da ferro, carbonio e cromo; è caratterizzato da una elevata resistenza all'ossidazione e alla corrosione.

L'acciaio inox è definibile biomateriale se utilizzato come vite da impianto ortopedico; non è biomateriale se usato nella carpenteria navale.

ESERCIZIO 1: Che combinazione di materiali sono utilizzate per le protesi d'anca?

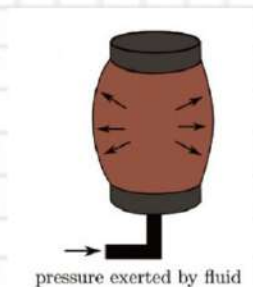


Stelo: acciaio inossidabile, lega di cobalto o lega di titanio.

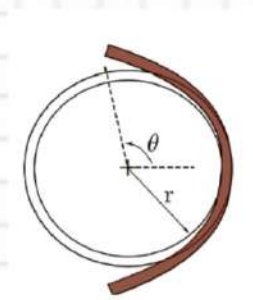
Cotile: titanio.

Inserto: ceramica o metallo, polietilene.

Testa: ceramica, lega cromo-cobalto.

ESERCIZIO 1: Scegliere uno o due test e vedere esempi di caratterizzazione fatte.Prova di gonfiaggio

usata per la caratterizzazione delle proprietà fisiche della parete aortica.

Angolo di apertura

usato per studi di aspetti meccanici delle arterie polmonari.

ESERCIZIO 2: Scegliere un materiale, calcolare il modulo elastico e ricavare lo spessore.

	D_mean [mm]	Spessore [mm]	PWV $\left[\frac{m}{s}\right]$	E [MPa]
Abdominal Aorta A	12.200	1.064	6.280	0.463

0,01220

0,001064

$$\rho = 1,055 \frac{g}{cm^3} = 1055 \frac{kg}{m^3}$$

Materiale utilizzato: resina fotopolimerica

$$E_{ph} = 0,3 \text{ MPa}$$

$$h_{ph} = \frac{PWV_{vass}^2 \cdot \rho \cdot D}{E_{ph}} = 1,7 \text{ mm}$$

ESERCIZIO 1: Calcolare il modulo elastico dell'aorta di un paziente soggetto a ipertensione (variazione di pressione molto grande) e di un paziente con un pesante irrigidimento del vaso (bassa variazione di diametro).

$$E = \frac{P_s - P_d}{2 \frac{D_s - D_d}{D_d^3}}$$

$$= \frac{\Delta P}{2 \frac{\Delta D}{D_d^3}}$$

$$h \ll R$$

P_s : PRESSIONE SISTOLICA
 P_d : PRESSIONE DIASTOLICA
 D_s : DIAMETRO IN SISTOLE
 D_d : DIAMETRO IN DIASTOLE

In condizioni normali:

- diametro aorta: 2,5-3,5 cm
- pressione sistolica (pressione massima quando il cuore è in fase di contrazione): 90-120 mmHg
- pressione diastolica (pressione minima quando il cuore è in fase di rilassamento): 60-80 mmHg

$$E = \frac{\Delta P}{2 \frac{\Delta D}{D_d^3}} = \frac{40}{2 \cdot \frac{1}{0,025^3}} = 0,0125 \text{ Pa}$$

Paziente iperteso → variazione di pressione grande

- pressione sistolica: 140-160 mmHg
 - pressione diastolica: 90-100 mmHg
- $$\Delta D \approx 60 \text{ mmHg}$$

$$E = \frac{\Delta P}{2 \frac{\Delta D}{D_d^3}} = \frac{60}{2 \cdot \frac{1}{0,025^3}} = 0,01875 \text{ Pa}$$

Paziente con irrigidimento della aorta → bassa variazione di diametro

$$E = \frac{\Delta P}{2 \frac{\Delta D}{D_d^3}} = \frac{40}{2 \cdot \frac{0,5}{0,025^3}} = 0,025 \text{ Pa}$$